

Variogramas adaptativos: un método práctico para aumentar la utilidad del error de estimación por kriging

Arístides Alejandro Legrá Lobaina
Dulce María Atanes Beatón

Resumen

Se propone el uso de variogramas adaptativos con respecto a su alcance, meseta, efecto pepita y a su modelo, los que permiten obtener correcciones locales del modelo de la variabilidad de la variable que se estudia. A partir de estos variogramas se obtiene una importante consecuencia: la varianza de estimación por kriging no solo depende de la posición espacial de los datos, sino también, de los valores de la variable que se estudia en esos datos. Finalmente, se enuncian procedimientos prácticos para implementar los variogramas adaptativos y evaluar con precisión el error probable de una estimación.

Palabras clave

Estimación, kriging, varianza de estimación, variograma.

Adaptive variogram: a practical method to enhance the application of kriging error prediction

Abstract

It is proposed the application of adaptive variograms based on their range, sill, nugget effect and model type; which allows a local correction of the variability model of the variable under study. Based on these variograms, an important consequence is obtained: the estimation variance using the kriging method is not only dependent on the spatial position of data but also on the values of the variable studied in the data. Lastly, practical procedures are identified to implement adaptive variograms and assess potential error of an estimate more accurately.

Key words

Estimation, kriging, estimation variance, variogram.

INTRODUCCIÓN

La estimación por kriging constituye uno de los principales elementos de la Geoestadística y definió una nueva era en las tareas de pronóstico en las ciencias geológicas, mineras y otras que han empleado los conceptos y procedimientos de esta rama aplicada de las Matemáticas. Sin embargo, el triunfo de la Geoestadística dentro de la práctica geológica y minera todavía es ensombrecido por el hecho de que la varianza de estimación -parámetro que se optimiza al aplicar el método- solo depende, a través del variograma, de la posición geométrica de los datos con respecto al punto o panel donde se estima la variable que se estudia, es decir, que esta varianza no está relacionada funcionalmente con los valores particulares de la variable en los puntos.

El presente trabajo tiene el objetivo de mostrar una solución a ese problema mediante la introducción de los variogramas adaptativos respecto a ciertos parámetros.

Definición clásica de la estimación por kriging

Según David (1977), la estimación por kriging parte del conocimiento de los valores de la variable W en un conjunto de n puntos P_i , o sea, se conocen los datos (P_i, W_i) con $i=1,2,\dots,n$. Se supone estudiada la variabilidad del comportamiento de W en el dominio D que se investiga, y esta variabilidad se expresa por el variograma $\gamma(h)$ que es una función de la distancia euclidiana h definida entre puntos del dominio D . La expresión analítica de este variograma, usualmente se obtiene mediante el ajuste de uno o varios modelos teóricos a un variograma experimental y debe cumplir cierta restricción, basada en la necesidad de que la varianza de cualquier estimación debe ser nula o positiva. La estimación por kriging del valor de W en un panel A se define como:

$$W_e = W(A) = \sum_{i=1}^k a_i W(P_i)$$

Donde debe anotarse que son considerados k puntos ($k \leq n$) para realizar esta estimación.

Se quieren encontrar valores adecuados de a_i (conocidos como pesos o ponderadores) tales que se cumplan dos condiciones:

1. $\sum_{i=1}^k a_i = 1$, si la media no es conocida.

2. Se minimice la varianza de estimación:

$$\sigma_e^2 = 2 \sum_{i=1}^k a_i \gamma(P_i, A) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \gamma(P_i, P_j) - \gamma(A, A)$$

Donde $\gamma(P_i, A)$ indica la variabilidad de cada punto P_i con respecto al panel A . El valor $\gamma(P_i, P_j)$ es la variabilidad entre los puntos P_i y P_j . Finalmente $\gamma(A, A)$ es la variabilidad total del panel A . O sea, que la varianza de estimación depende de la relación de las muestras con el panel A , de la relación entre las muestras, y de la variación de calidad dentro del panel a estimar (Clark 1977, pág. 88).

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange (David 1977) se ha demostrado que los valores a_i se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \gamma_{11}a_1 + \gamma_{12}a_2 + \dots + \gamma_{1k}a_k + \mu = \gamma_{1A} \\ \gamma_{21}a_1 + \gamma_{22}a_2 + \dots + \gamma_{2k}a_k + \mu = \gamma_{2A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{k1}a_1 + \gamma_{k2}a_2 + \dots + \gamma_{kk}a_k + \mu = \gamma_{kA} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1 \end{cases}$$

Donde se ha simplificado la notación tomando $\gamma_{ij} = \gamma(P_i, P_j)$ y tomando $\gamma_{iA} = \gamma(P_i, A)$. El valor auxiliar μ es el multiplicador de Lagrange. La varianza de estimación ahora queda determinada por la expresión:

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^k a_i \gamma(P_i, A) + \mu - \gamma(A, A)$$

Manteniendo el mismo variograma para todo el dominio D y asumiendo constantes el tamaño y la forma del panel A , se tiene que para un conjunto dado de k puntos la varianza de estimación solo depende de

la posición geométrica de los puntos P_i ya que son las distancias entre cada dato usado y el panel los que determinan los valores de cada término $\gamma(P_i, A)$ y de cada peso a_i . O sea, σ_e^2 no depende de los valores particulares $W(P_i)$, $i=1, 2, \dots, k$. De esta formulación puede derivarse el caso de la estimación puntual considerando idealmente el panel A con las dimensiones de un punto P_e . La expresión $\gamma(P_i, A)$ se reduce a $\gamma(P_i, P_e)$ y $\gamma(A, A) = 0$.

Existe una importante propiedad de la estimación por kriging que resulta indispensable recordar: el *efecto screen* (David 1977). A medida que la variabilidad de los valores de W tiende a ser independiente de la distancia entre los puntos, o sea, el comportamiento de W tiende a ser completamente aleatorio, entonces los valores de a_i tienden a $1/K$ y μ tiende a σ^2/K (σ^2 es la varianza de W en los datos).

Elementos básicos en la práctica del kriging

La práctica de la estimación por kriging tiene mucho de arte: hay que conocer profundamente sus aspectos técnicos, es indispensable la práctica y además, es necesaria cierta dosis de inspiración. Todos los autores reconocen que lo primario es realizar un correcto análisis variográfico, que consiste básicamente en determinar los siguientes elementos:

- ◆ Efecto pepita.
- ◆ Alcance.
- ◆ Meseta.
- ◆ Anisotropía.
- ◆ Zona de Influencia.
- ◆ Tipo de variograma.

Luego, teniendo en cuenta las características particulares del problema, establecer el tipo de kriging que se utilizará, así como sus parámetros (forma y dimensiones de los paneles, estrategias de búsqueda, tratamiento de los pesos negativos, etc.) En la bibliografía referida al final de este trabajo (y en otras), han sido profusamente tratadas las caracterizaciones y los procedimientos para determinar dichos parámetros, por lo que este artículo concentra la atención en la

influencia que tienen éstos, y otros elementos, en el valor estimado W_e y en el valor de la varianza de estimación σ_e^2 .

Efecto Pepita: desde el punto de vista numérico esta variable que generalmente se denota C_o , toma valores no negativos y en la medida que aumenta, desde cero hasta el valor de la varianza de los datos σ^2 , se tiene que:

- a. Los valores de los pesos a_i tienden al valor $1/K$.
- b. El valor estimado W_e tiende a la media aritmética de los datos $W(P_i)$ con $i=1,2,\dots,k$.
- c. El valor de μ aumenta y tiende a σ^2/K .
- d. El valor de σ_e^2 aumenta hasta σ^2/K cuando se trata de kriging de bloque y hasta $\sigma^2 + \sigma^2/k$ cuando es kriging puntual.

Alcance: para un variograma simple y transitivo, en la medida que el alcance aumenta desde cero hasta el valor de la mayor distancia entre dos puntos pertenecientes a los datos, se produce un cambio importante en el modelo de la variabilidad expresado mediante el variograma. Se tiene que:

- a. Para variogramas no decrecientes, al aumentar el alcance disminuye el valor puntual del variograma para cada una de las distancias menores que el nuevo alcance. En la práctica esto significa que el valor de σ_e^2 disminuye cuando aumenta el alcance.
- b. Las variaciones de W_e en general no están correlacionadas con los cambios del valor del alcance. Para valores relativamente altos de este último con respecto a las distancias entre los puntos relacionados con una estimación, los cambios del alcance definen pocas variaciones en el valor de W_e .

Cuando se trata de variogramas anidados y se ha considerado una anisotropía global, los cambios en el alcance de cualquiera de las estructuras que forman a los variogramas producen efectos análogos.

Meseta: en el caso de variogramas simples (no compuestos), cuando el resto de los elementos permanece invariables, al aumentar el valor de la meseta:

- a. Permanece constante el valor estimado W_e .
- b. Aumenta el valor de la varianza de estimación σ_e^2 .

Vale decir que para variogramas anidados el valor de W_e no permanece constante.

Anisotropía: la isotropía o anisotropía del fenómeno estudiado se determina mediante el análisis de los variogramas direccionales. Algunos autores (Bleines *et al.* 2001, pág. 395) definen la anisotropía como la diferencia de la variabilidad de un fenómeno en las diferentes direcciones del espacio. Un fenómeno se considera isotrópico cuando las características numéricas (efecto pepita, alcance, meseta) y el tipo de todos los variogramas direccionales son semejantes.

Hace tres décadas, la doctora Isobel Clark (1977, pág. 112) planteaba que: "*la anisotropía era el problema más sencillo de acometer*". Esta idea ha evolucionado como consecuencia del desarrollo de la teoría geoestadística y con la experiencia práctica de su aplicación. Hoy en día puede considerarse que la anisotropía es el aspecto más complicado de comprender y de resolver en cada caso particular, ya que su determinación visual (examinando los variogramas direccionales) o automatizada (Hart & Rudman 1997) debe corresponderse con una realidad que generalmente es muy compleja.

Se conocen dos tipos de anisotropía:

- a. Geométrica. Para variogramas obtenidos en diferentes direcciones, sus alcances son diferentes y otras características coinciden. Si en una dirección el alcance es máximo (A_{max}), entonces se debe considerar una extensión mayor de la zona de influencia en esa dirección; un dato situado en esa dirección a una distancia A_{max} deberá tener el mismo peso en la estimación que uno situado a la distancia A_{min} en la dirección de menor alcance A_{min} . En estos casos el fenómeno anisotrópico es considerado durante la estimación como un fenómeno isotrópico, corrigiendo las distancias entre los puntos mediante una expresión matemática, lo cual significa en la práctica que el alcance de todos los variogramas direccionales será el mismo. Este asunto conduce a una pregunta. ¿Qué valor tomar como

- alcance general: A_{min} , A_{max} , otro? La respuesta a esta pregunta es definitoria para el rango de los valores de σ_e^2 por tanto, el análisis de los mismos debe hacerse cuidadosamente ya que, como se sabe, aumentan si disminuye el alcance.
- b. Zonal. Existen zonas del dominio tal que los variogramas direccionales que apuntan a esas zonas se diferencian marcadamente de los demás (por ejemplo, el caso de una mineralización estratiforme). La anisotropía zonal más distinguida por muchos autores es aquella donde se presentan diferentes mesetas y coinciden otras características. Estas anisotropías son modeladas mediante modelos anidados con anisotropías locales según cada estructura.

En la actualidad algunos autores se refieren a la *anisotropía efecto pepita* (Deutsch & Journel 1998, pág. 25) pero esto parece ser una condición impuesta por casos reales que se encuentran en muy pocas ocasiones. Más bien puede pensarse que este tipo de anisotropía se ha tomado a partir de la necesidad práctica del ajuste de variogramas anidados.

Otro fenómeno interesante relacionado con un comportamiento direccional de la variabilidad es el llamado **efecto proporcional** donde los variogramas presentan el mismo alcance y diferentes mesetas, pero éstas son una función de la media de W en cada dirección. El efecto proporcional puede ser directo (cuando aumenta la meseta junto con las medias) o inverso, y se determina mediante un gráfico en el plano de las varianzas direccionales contra las medias direccionales. La solución básica de estos casos está ligada con la división de cada variograma por su respectiva media direccional (David 1977, pág. 172).

Zona de influencia y geometría de los puntos de estimación: cuando se va estimar se procede a seleccionar los puntos que serán utilizados: pueden utilizarse todos los datos en cada estimación (lo cual significa un trabajo más laborioso) o seleccionar algunos datos cuya relación con el panel a estimar haga aconsejable su uso. Existen varias estrategias de búsqueda de los puntos que se utilizarán en cada estimación, entre las más conocidas (Deutsch & Journel 1998) están los siguientes:

- a. Para cada panel donde se estimará puede establecerse una zona de influencia con centro en el centro del panel. Generalmente la forma y tamaño de la zona de influencia se fijan para todas las estimaciones a partir de los resultados del estudio realizado considerando todos los datos, pero su posición cambia según el panel donde se estima W . Los datos que pertenecen a la frontera o al interior de la zona de influencia del panel a estimar son los que se utilizarán para realizar la estimación ya que son los que tienen influencia en la determinación del valor de W en el panel. Como zona de influencia se utiliza en muchas ocasiones una elipse en el plano y un elipsoide en el espacio.
- b. Fijar un valor N_{max} de puntos a usar. Se seleccionarán los puntos tomando los de menores distancias al panel donde se estima.
- c. Búsqueda por octantes: se divide la vecindad del panel en zonas espaciales de intersección nula a las que llamaremos octantes. Se selecciona cierto número de puntos en cada una de estas zonas aunque en algunos octantes los puntos estén muy cercanos y en otros no.

Los algoritmos de búsqueda son variados, Deutsch & Journel (1998) explican tres de ellas: exhaustiva, super bloque y espiral.

La geometría de los puntos seleccionados ejerce una importante influencia en la estimación por kriging. Consideremos cuatro aspectos:

- a. La varianza de estimación global σ_e^2 (conocida también como error de cualidad y ligada a la extrapolación de información desde un punto de muestreo hasta un panel o un dominio) aumenta en la medida en que aumenta la irregularidad geométrica de la red. Tal como explica (García-Guerra 1988, págs. 98-99), el valor de σ_{e1}^2 en una red aleatoria pura es mayor que el valor de σ_{e2}^2 en una red aleatoria estratificada y este último valor σ_{e2}^2 es mayor que el valor σ_{e3}^2 para una red regular.
- b. Según Diehl & David (1982, pág. 5) en general el valor de σ_e^2 decrece:
 - i. Cuando aumente el número de datos alrededor del panel.
 - ii. Cuando decrece la distancia media de los datos con respecto al centro del panel.

- iii. Cuando se incrementa la distancia media entre los datos que se usan (o sea, cuando estos datos están regularmente distribuidos).
- c. Cuando los datos tienen buena regularidad geométrica, varía poco el número k de puntos seleccionados para cada estimación por estar dentro de la zona de influencia correspondiente, pero si los datos están distribuidos irregularmente puede suceder que se produzcan grandes variaciones de k durante la estimación de los paneles. Esta situación puede ser contraproducente cuando se estiman paneles situados en una zona de grandes concentraciones de puntos (en este caso se presentarán sistemas de ecuaciones lineales –SEL- de un alto orden y aumenta la probabilidad de que se produzca el fenómeno de apantallamiento) y cuando se estiman paneles en zonas con pocas muestras (en este caso se estimarán valores de W a partir de unos pocos datos y en ocasiones con una posición geométrica desfavorable con respecto al panel). Se han estudiado varias soluciones matemáticas para este problema entre las que se pueden citar la simulación –discutible en nuestra opinión- de nuevos datos (Estévez & Cuador 2003) para las zonas de datos escasos y la clusterización para las zonas de muestreos muy densos (David 1977, págs. 162-163).

Otra solución práctica para este tercer aspecto puede ser fijar el número de puntos que se usarán en las estimaciones y variar el tamaño de la zona de influencia, aumentando o disminuyendo proporcionalmente sus dimensiones hasta que se tenga dentro de la zona aproximadamente el número deseado.

- d. Apantallamiento: este fenómeno se produce cuando se tienen dos datos o más cuyos puntos están alineados en una misma dirección con respecto al panel donde se estima. El método kriging asigna pesos mayores a los puntos más cercanos al panel, mientras que a los más alejados, "apantallados" por los más cercanos, se les asigna pesos menores, pudiendo aparecer en ocasiones valores negativos.

Cuando se presenta la situación explicada en el cuarto aspecto y aparecen pesos a_i con valores negativos, puede considerarse la eliminación de los pesos negativos o su transformación en pesos no negativos. Kasuo-Yamamoto (2000) explica el Método de Froidevaux (anula los pesos negativos), el Método de Journel y Rao y el Método de Deutsch (estos dos últimos estandarizan los pesos en el intervalo $[0,1]$). El Método de Deutsch asegura además el insesgamiento (Deutsch 1996). Otra forma de resolver el problema puede ser eliminar del conjunto de puntos usados en la estimación aquel que tenga menor peso negativo. Si es repetida esta operación hasta que todos los puntos tengan sus pesos no negativos, entonces se tiene un conjunto de puntos adecuados para la estimación, considerando la zona de influencia y el variograma definidos. Para ambos métodos se precisa de un tiempo de cálculo significativo, pero admisible.

Mediante experimentos numéricos hemos encontrado que para aquellos variogramas que en todo su dominio de definición tienen signo no positivo en su segunda derivada respecto a h , se cumple que si es aumentado el número de puntos usados en estimaciones puntuales, entonces el valor de σ_e^2 disminuye. En estos casos debe buscarse una estrategia de cálculo que permita, sin aumentar demasiado el orden de los SEL, tomar un número suficiente de puntos.

Tipo de variograma: el modelo debe responder a la realidad y esto es lo más importante. La calificación de un modelo se basa en:

- a. El conocimiento que se tiene del fenómeno real.
- b. La apreciación visual de la correspondencia entre el variograma experimental y el modelo que ajustamos.
- c. Criterios numéricos, tales como IGF (*Indicative Goodness to Fit*), propuesto por Pannatier (1994); la validación cruzada (Deutsch & Journel 1998, Bleines *et al.* 2001); ajustes mínimos cuadrados clásicos (Jian *et al.* 1996); programación lineal (Chen & Jiao 2001); ajustes condicionados a pasar por ciertos puntos (Legrá-Lobaina 1999); método de los momentos (Pardo-Igúzquiza & Dowd 2001), entre otros.

En la actualidad el tipo de variograma de uso más general es el anidado con anisotropías globales y locales (Deutsch & Journel 1998, Bleines *et al.* 2001). Los mismos tienen la expresión matemática general siguiente:

$$\gamma(h) = C_0 + \sum_{k=1}^{NE} \gamma_k(h, Anisotropía_k)$$

Donde NE es el número de estructuras y se asume que para cada una de éstas se define el tipo, los valores de sus parámetros numéricos y una anisotropía local que permite un tratamiento diferenciado de las distancias h en cada estructura. Este tipo de modelo es versátil y prácticamente cubre cualquier necesidad de modelos de variogramas, sin embargo, obtener un modelo variográfico de este tipo es complejo y precisa de un software adecuado para su definición y uso.

Para un variograma anidado con anisotropías locales es bastante difícil predecir qué cambios se producirán cuando las estructuras locales cambian pero para todo el modelo se cumple lo ya explicado: el valor de σ_e^2 varía junto con la variabilidad expresada en el variograma.

Características del panel: siguiendo la exposición de Diehl & David (1982, pág.5) se conoce que en general el valor de σ_e^2 obtenido por kriging de bloque decrece cuando las dimensiones del panel crecen.

La forma del panel y su orientación espacial influyen también en el valor de σ_e^2 pero de forma bastante compleja. Intuitivamente se puede asumir que es conveniente definir la forma y orientar espacialmente a los paneles teniendo en cuenta la anisotropía del fenómeno.

En conclusión puede reiterarse que el modelo de variograma que se ajuste al variograma experimental obtenido a partir de todos los datos, la anisotropía, la zona de influencia y las características del panel de estimación, tienen influencia decisiva en la estimación por kriging y en el valor de la varianza de estimación.

PROPUESTA DE VARIOGRAMAS ADAPTATIVOS

Para el análisis de la fiabilidad de la estimación Kasuo-Yamamoto (2000) ha propuesto la varianza de interpolación, cuya definición para un punto P es:

$$S_e^2 = \sum_{i=1}^n a_i [W_i - W(P)]^2 \quad . \text{ Donde se exige que } a_i \geq 0.$$

Esta medida de la fiabilidad cumple su cometido y, como señala su creador, su valor aumenta al aumentar la dispersión de los valores W_i y, además, usa indirectamente los resultados del análisis estructural a través de los pesos a_i .

Pero deben ser considerados otros dos aspectos: Aún cuando la región de estudio parezca suficientemente homogénea respecto al comportamiento de una variable W , su variabilidad en muy pocas ocasiones podrá ser representada con buena precisión en todas las partes del dominio D por el modelo del variograma ajustado, ya que él no es otra cosa que un modelo de la variabilidad media de W en la región. O sea, conocer bien la fiabilidad de una estimación no garantiza que se aumenta la fiabilidad de dicha estimación. Por otra parte, no es la varianza de interpolación el parámetro que se optimiza cuando se estima por kriging.

Para lograr una mayor fiabilidad en la estimación por kriging y al mismo tiempo obtener valores de la varianza de estimación que reflejen para cada cálculo no solo la geometría de los datos utilizados en el mismo, sino que además, reflejen las características particulares de los valores de $W(P_i)$ en esos datos es necesario pasar del concepto del variograma general y único $\gamma(h)$ que es solo función de la distancia, a la idea del variograma como función de la distancia y de las características del panel A . Estos variogramas pueden llamarse **adaptativos** y denominarse como: $\gamma(h,A)$

Para mostrar su viabilidad es conveniente establecer algunos procedimientos prácticos para la definición de los variogramas adaptativos.

Teniendo en cuenta lo explicado anteriormente pueden proponerse las siguientes reglas:

1. Los números mínimo K_{min} y máximo K_{max} de puntos para realizar la estimación serán prefijados.
2. La zona de influencia será dinámica respecto a sus dimensiones. Para realizar cada estimación se escogerán los k datos que están dentro de la zona de influencia del panel y si no se cumpliera la relación $K_{min} \leq k \leq K_{max}$ entonces se variará convenientemente las dimensiones de la zona de influencia. Es obvio que el valor medio de K_{min} y K_{max} debe ser suficientemente grande para que al obtenerse k se garantice la creación de un variograma experimental.
3. Se obtendrá el valor de la varianza de W y un nuevo variograma experimental para los k datos seleccionados para cada estimación. En este nuevo variograma, la distancia máxima entre los puntos no debe superar el duplo del mayor alcance obtenido en los variogramas direccionales.
4. Se particularizará para cada estimación el variograma. Esto podrá hacerse siguiendo una de las siguientes estrategias:
 - a. Cambiar la meseta original por una nueva meseta que puede estar definida por la varianza de los k datos escogidos para la estimación. En este caso el valor C_0 del efecto pepita deberá variarse en el mismo rango que la meseta y si toma valor negativo entonces se le asigna el valor cero.
 - b. Cambiar los valores de la meseta, del alcance y del efecto pepita. En este caso si k es un valor insuficiente para obtener un buen variograma experimental conviene obtener la meseta como la varianza de los k datos, ajustar visual o analíticamente el alcance y finalmente establecer C_0 .
 - c. Ajustando un nuevo variograma para cada estimación. La desventaja de esta estrategia es que probablemente sean insuficientes los k puntos usados en la estimación para obtener un buen variograma experimental pero tiene la ventaja de que este nuevo variograma debe ser sencillo, ya que es un modelo de la variabilidad local.

Estos procedimientos deben estar complementados con algún tratamiento a los pesos negativos ya que los mismos tienden a suavizar los valores de σ_e^2 .

Como resultado de lo explicado pueden proponerse heurísticamente dos importantes tesis:

- I. Se conoce que cuando se aplica el método de validación cruzada (Deutsch & Journel 1998) para cada punto P_i de los datos se calcula por kriging los valores W_i y σ_{ei}^2 . La suficiencia de los datos y la calidad del modelo variográfico y del diseño del kriging se mide básicamente mediante el análisis de las diferencias $W(P_i) - W_i$ ya que debe existir una correspondencia zonal general entre la variabilidad de estas diferencias y la variabilidad de W . La primera tesis es que desde el punto de vista de la variabilidad zonal los parámetros σ_{ei}^2 y $|W(P_i) - W_i|$ son equivalentes y ambas reproducen la variabilidad local de W excepto en aquellas zonas donde se producen fuertes variaciones puntuales de W_i (esto es equivalente a decir: donde hay insuficiencia de información local).
- II. La segunda tesis que se establece es: los valores de σ_e^2 constituyen un criterio consistente para evaluar la fiabilidad de una estimación particular. Esto tiene un efecto positivo en la eficacia de los métodos de estudio de racionalización de redes de muestreo (Vera & Legrá 2001) y de estudios de recursos y reservas basados en los valores de σ_e^2 (Diehl & David 1982).

CASO DE ESTUDIO

Se ha considerado sobre el plano XY el promedio de la concentración, en por ciento, de Ni en los recursos minerales promedios de un bloque cuadrado, de 300 m de lado, del yacimiento laterítico de Moa, provincia de Holguín, Cuba. Se tienen como datos 308 puntos de una red regular (de intervalo igual a 16,166 m) los cuales se muestran en la Figura 1.

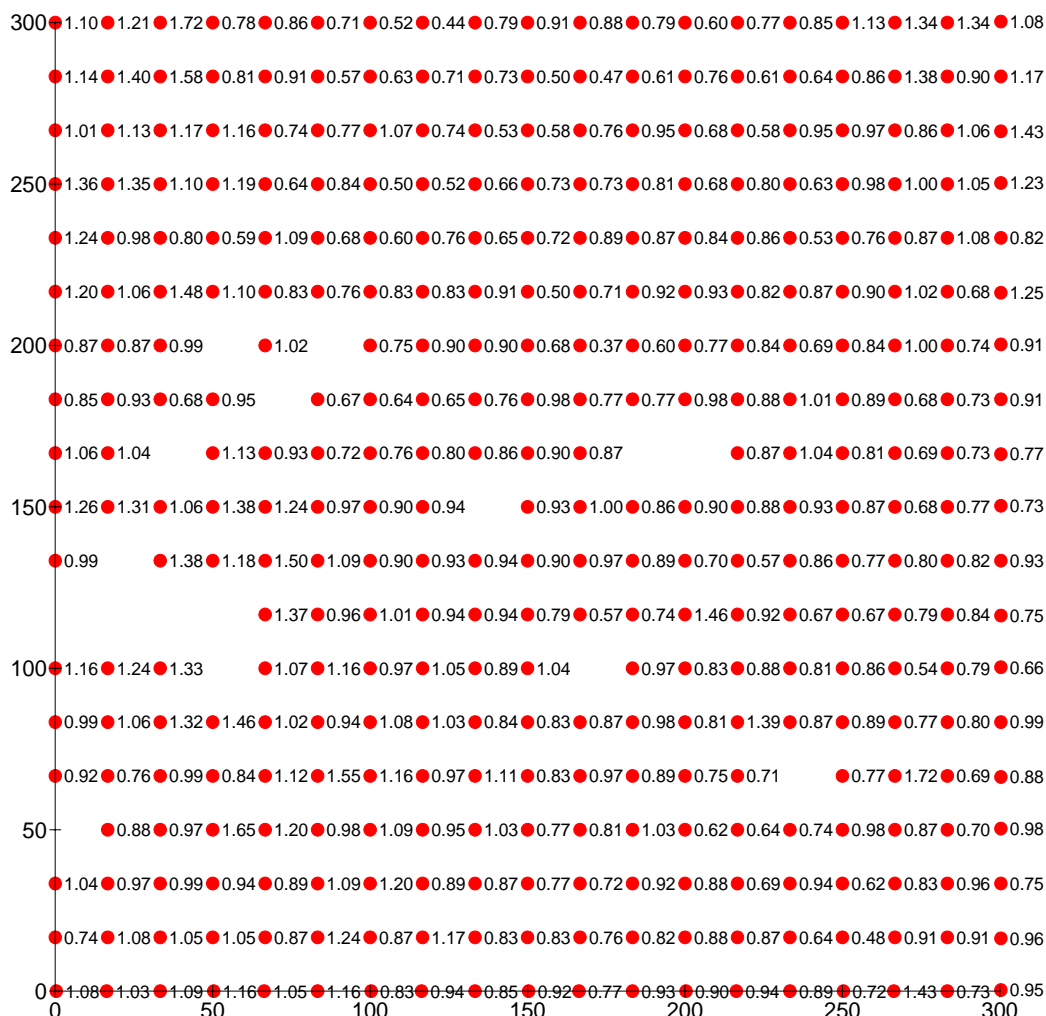


Figura 1. Valores promedios de la concentración de Ni (%) para un bloque de exploración.

Se calculó que la distancia mínima entre dos puntos es de aproximadamente 16 m y la máxima de aproximadamente 400 m. La distancia media es de aproximadamente 157 m y la moda de las distancias es de aproximadamente 83 m. Tomando como *lag* el valor de 17,69 m y computando las distancias no mayores de 305 m, se obtuvo el variograma omnidireccional y los variogramas direccionales (tomando sectores angulares de 30°). Para el variograma omnidireccional se ajustó un Modelo Esférico de Matheron Modificado (Legrá-Lobaina 1999):

$$\begin{cases} g = 0 & \text{para } h = 0 \\ g = 0,0250335 + (0,0339665) * (3 * h / (2 * 280) - (h/280) * \text{sqr}(h/280)/2) & \text{para } 0 < h \leq 280 \\ g = 0,0250335 + (0,0339665) & \text{para } h > 280 \end{cases}$$

El IGF tiene el valor 0,0015. Gráficamente tiene el aspecto que se muestra en la Figura 2.

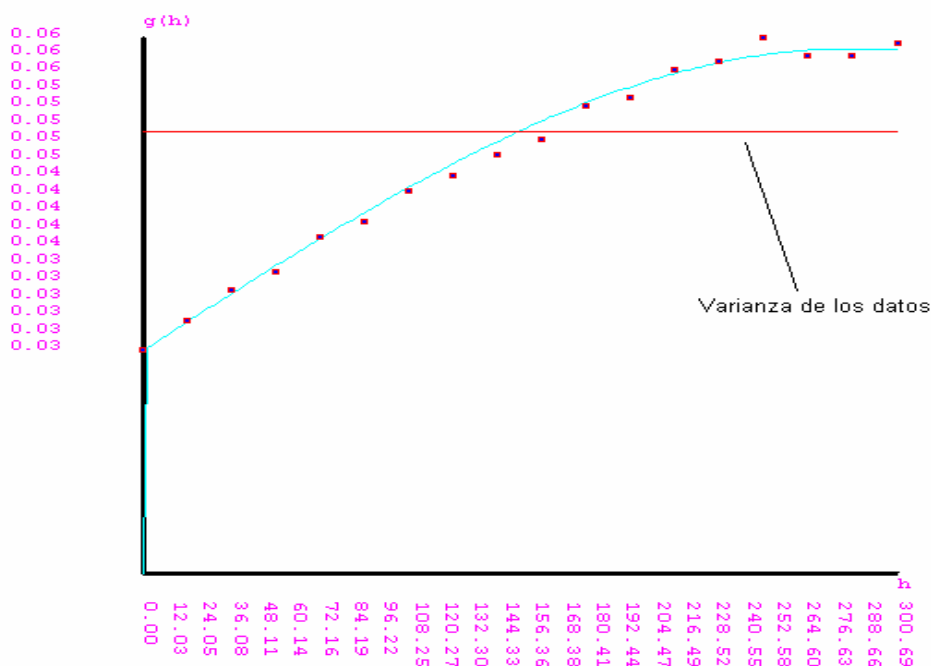


Figura 2. Variograma de la concentración de Ni.

La anisotropía fue analizada a partir de los variogramas direccionales (Figura 3) y como resultado se obtuvieron los siguientes parámetros de la elipse de anisotropía:

Radio Mayor: 292,68 m

Radio Menor: 208,61 m

Ángulo : 135°

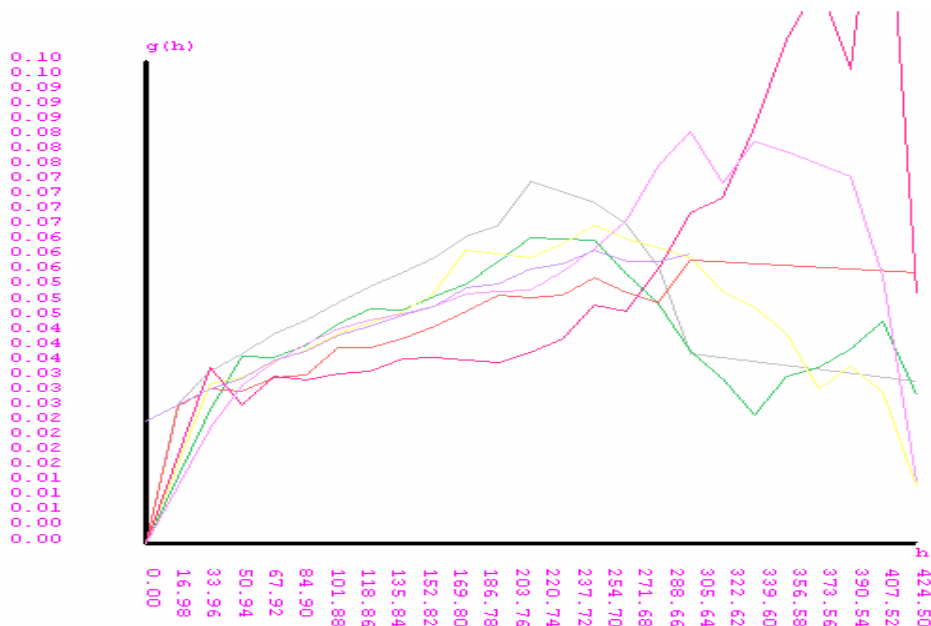


Figura 3. Variogramas direccionales.

Con estos resultados y fijando entre 7 y 13 el número de puntos a utilizar en las estimaciones puntuales obtenidas mediante el software Tierra (Legrá-Lobaina 2003), se utilizó el criterio de eliminar los puntos que generan pesos negativos (mediante la variación de las dimensiones de la zona de influencia). Bajo estas condiciones se procedió a obtener tres gráficos de isolíneas que permitieran comparar visualmente los resultados de la Varianza de Estimación (VE), de la Varianza de Interpolación (VI) y del valor absoluto de las diferencias entre la concentración de Ni medida y la estimada por el Método de Validación Cruzada (VC). En los dos primeros casos se obtuvieron tablas de 441 filas y en el último, una tabla de 345 datos. Las isolíneas (Figuras 4, 5 y 6) fueron dibujadas con el software *Surfer* (Golden Software 1999) mediante el Método de Interpolación Lineal con Triangulación, usando una rejilla de 100x100 puntos.

RESULTADOS

En las Figuras 4, 5 y 6 se muestran, respectivamente, las isolíneas de la varianza de estimación, de la varianza de interpolación, y del módulo de las diferencias por validación cruzada.

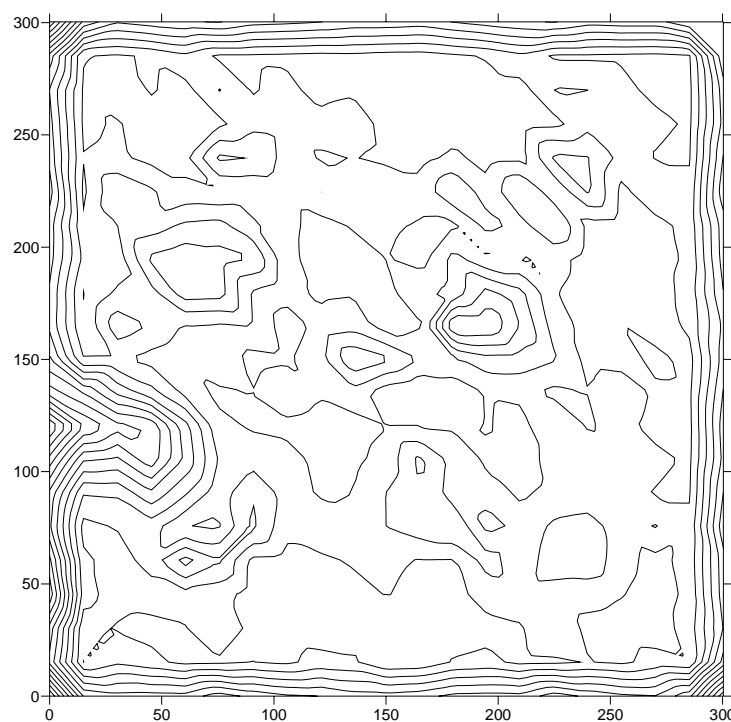


Figura 4. Isolíneas de la Varianza de Estimación (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,005%).

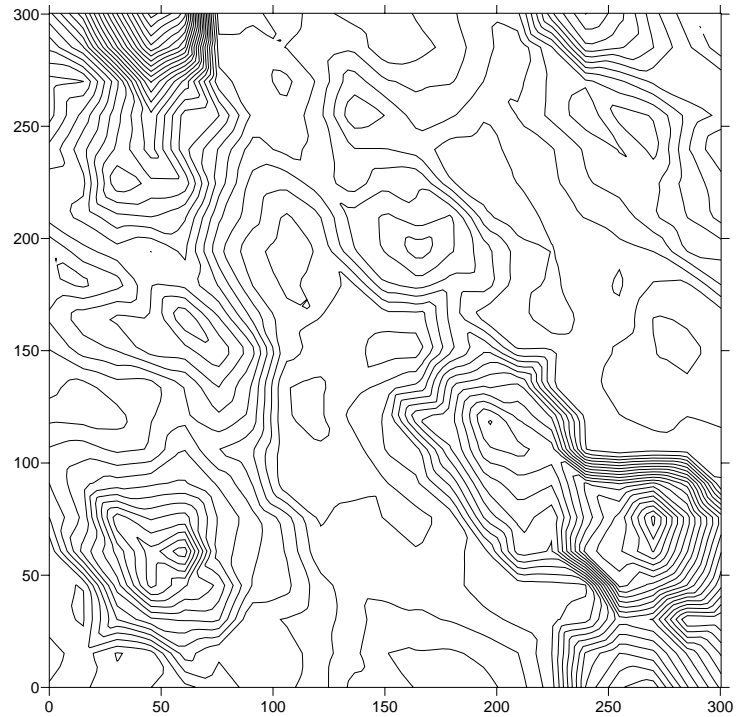


Figura 5. Isolíneas de la Varianza de Interpolación (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,005%).

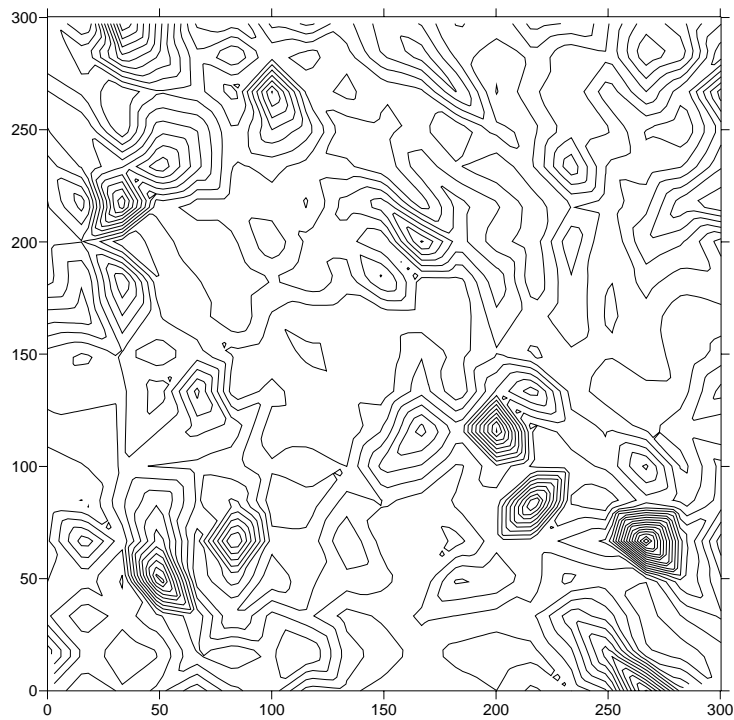


Figura 6. Isolíneas del módulo de las diferencias por validación cruzada (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,05%).

Si comparamos las tres Figuras se puede observar que la información cualitativa que proporciona la Figura 4 no coincide con las que proporcionan las figuras 5 y 6, en las cuales coinciden varias de las zonas de mayor variabilidad. Esto ilustra la ineficacia de la varianza de estimación clásica para estudiar la fiabilidad de las estimaciones.

Al realizar los mismos procedimientos utilizando los variogramas adaptativos, tomando en cada estimación como valor de la meseta del variograma la varianza de los puntos que intervienen en esa estimación, los valores del alcance y del efecto pepita se obtuvieron proporcionalmente a los correspondientes valores originales, utilizando como factor de proporcionalidad la relación (cociente) entre la meseta actual y la meseta del variograma general. Los resultados se muestran en las Figuras 7, 8 y 9.

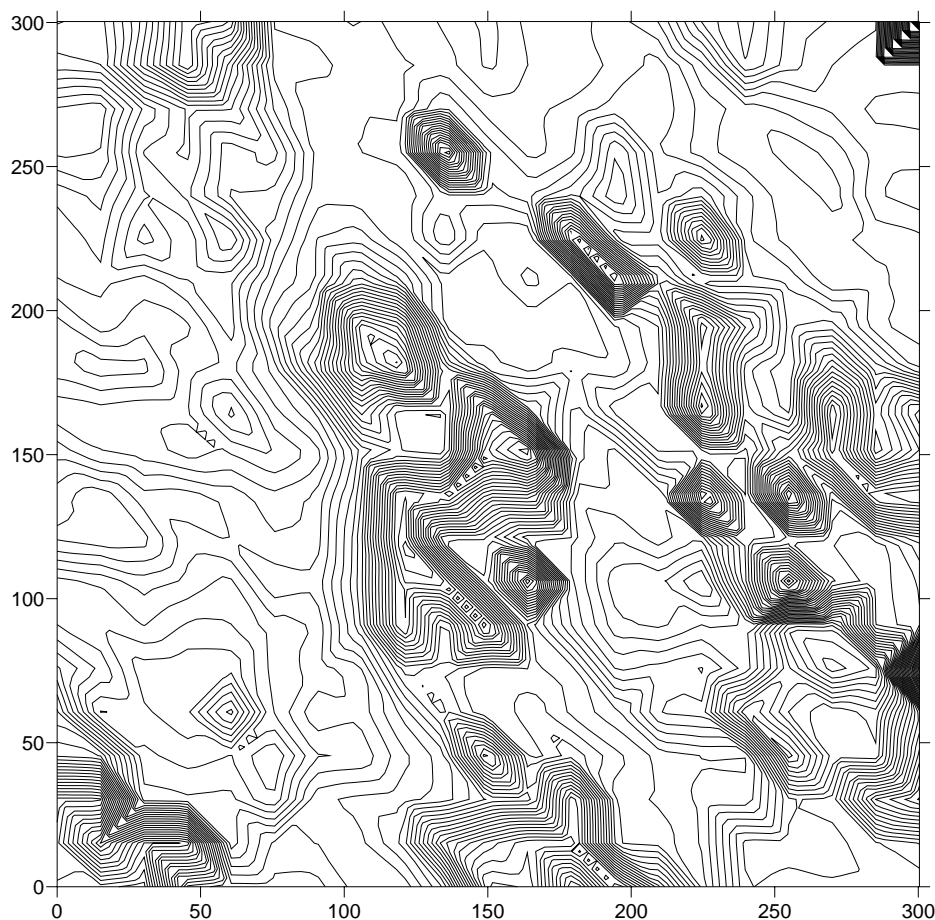


Figura 7. Isolíneas de Varianza de Estimación usando Variogramas Adaptativos (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,01%).

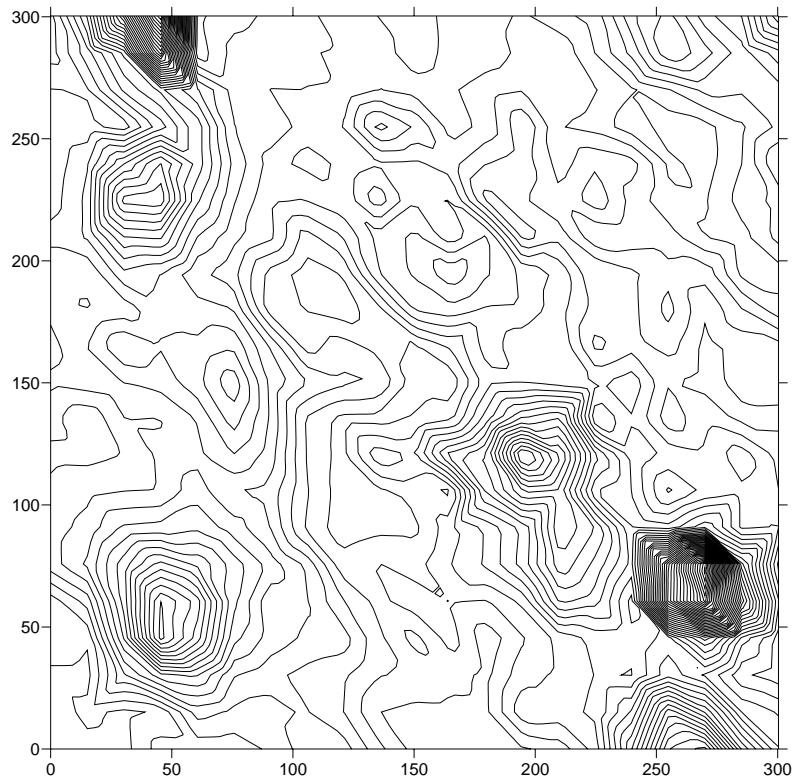


Figura 8. Isolíneas de Varianza de Interpolación usando Variogramas Adaptativos (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,01%).

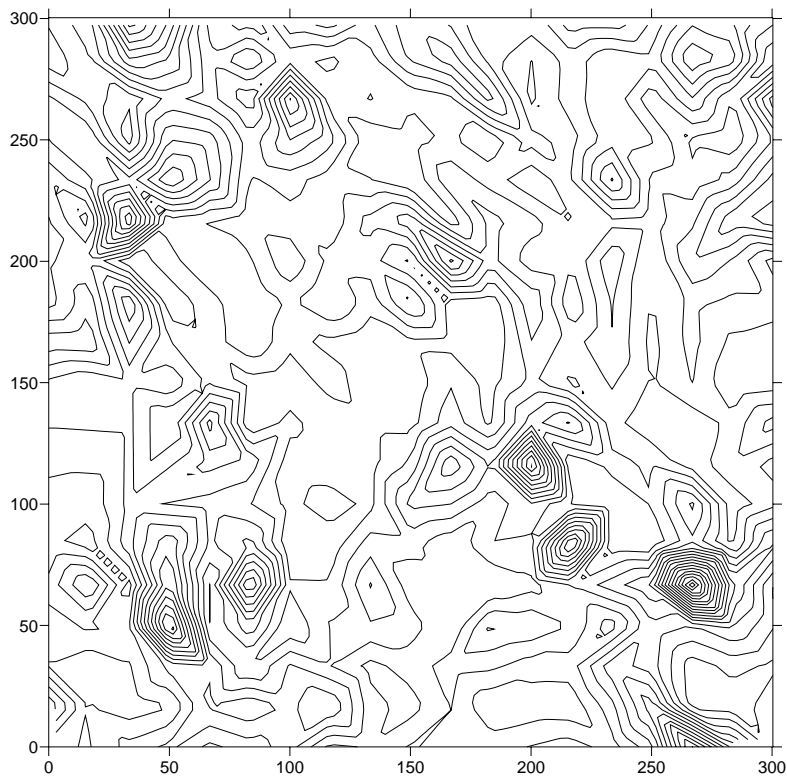


Figura 9. Isolíneas del módulo de las diferencias por validación cruzada usando Variogramas Adaptativos (diferencias entre curvas de nivel igual a 0,05%).

Al comparar las Figuras 5 y 8 se observa que no se han producido grandes cambios respecto a las zonas de mayor variabilidad de la varianza de interpolación cuando se usan variogramas adaptativos en lugar del variograma estático. Si comparamos las Figuras 6 y 9 se puede afirmar algo semejante respecto a las diferencias por validación cruzada.

Son obvias las grandes diferencias entre la varianzas de estimación obtenidas mediante variogramas adaptativos con respecto a las varianzas obtenidas mediante el variograma estático (Figuras 4 y 7).

Para analizar si existen correlaciones entre las varianzas de estimación y las varianzas de interpolación véase la Tabla 1.

Tabla 1. Medias Aritméticas, Coeficiente de Variación (cociente entre la desviación estándar y la media aritmética) y Matriz de Correlación entre las variables: Varianza de Estimación con Variograma Estático, Varianza de Estimación con Variograma Adaptativo, Varianza de Interpolación con Variograma Estático y Varianza de Interpolación con Variograma Adaptativo

Variable	VE con Variograma Estático	VE con Variogramas Adaptativos	VI con Variograma Estático	VI con Variogramas Adaptativos	Media Aritmética y Coeficiente de Variación
VE con Variograma Estático	1	0,028523	0,035763	-0,010688	0,172312 0,048142
VE con Variogramas Adaptativos	0,028523	1	0,749885	0,656701	0,158732 0,241418
VI con Variograma Estático	0,035763	0,749885	1	0,816471	0,028327 0,741953
VI con Variogramas Adaptativos	-0,010688	0,656701	0,816471	1	0,025874 0,884094

Pueden destacarse cuatro aspectos:

- La correlación entre la VE con variograma estático y las otras variables es muy baja.
- Existe una aceptable correlación entre la VE con variograma adaptativo y las dos variables relacionadas con la VI.
- La varianza de interpolación ha sido invariante ante el cambio del tipo de variograma.
- La media aritmética de la VE con variograma adaptativo es ligeramente inferior a la media aritmética de la VE con variograma direccional lo cual muestra que el primer método de estimación presupone que en general se obtienen mejores resultados.

Las Figuras 10 y 11 aportan información importante sobre el comportamiento de las variables VE con variograma estático y VE con variograma adaptativo.

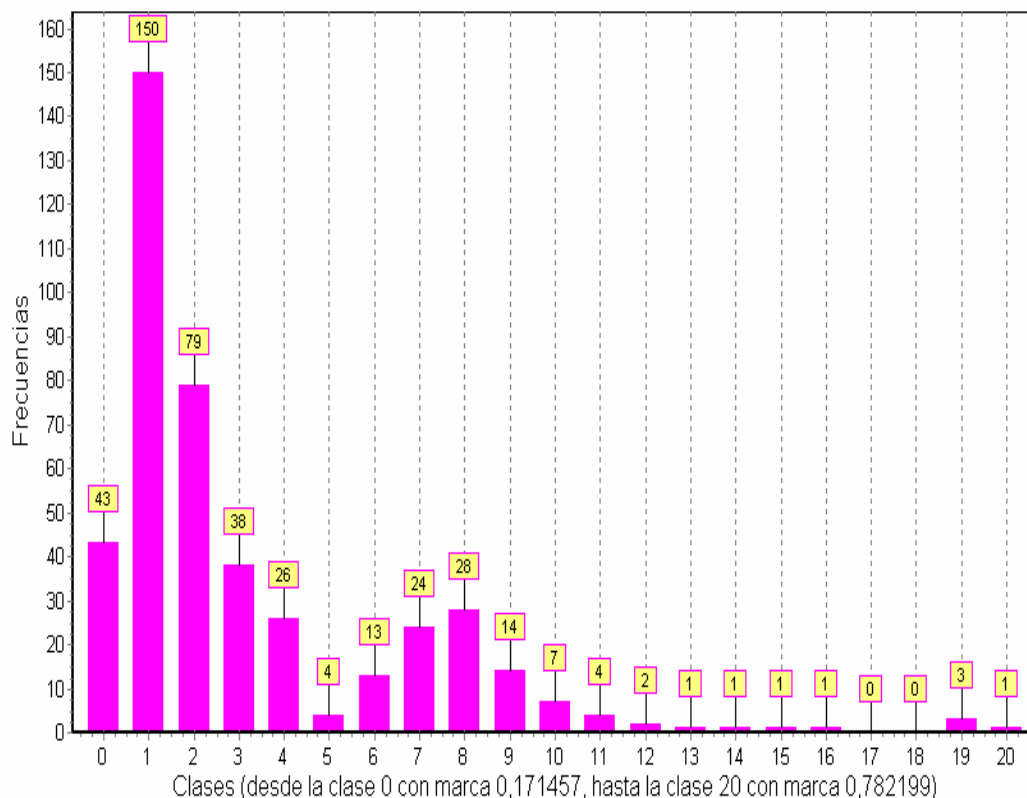


Figura 10. Comportamiento de las frecuencias de las varianzas de estimación con variograma estático.

CONCLUSIONES

Mediante el uso de variogramas adaptativos $\gamma(h,A)$ se refleja en el parámetro σ_e^2 la variabilidad local de las diferencias probables entre los valores reales $W(P)$ y los valores estimados $W_e(P)$ cuando se tiene suficiente información local. Esto es equivalente a decir que para evaluar la fiabilidad de las estimaciones por kriging, además de la varianza de interpolación S_e^2 , también puede usarse la varianza de estimación σ_e^2 , y que en ese caso la calidad de la evaluación depende de la suficiencia informativa de los datos, del adecuado modelo variográfico y de la forma en que el kriging sea realizado. El resultado de este trabajo proporcionará mayor eficacia a los métodos de estudio de racionalización de redes de muestreo y a los métodos de estudios de recursos y reservas basados en los valores de σ_e^2 .

REFERENCIAS

- BLEINES, C.; DERAISME J.; GEFFROY, F.; PARSEVAL, S.; RAMBERT, F.; RENARD, D. & TOUFFAIT, Y. 2001: *ISATIS Software Manual*. Geovariance and Ecole des Mines de Paris. Paris, January, 531 p.
- CHEN, YONGLIANG & JIAO, XIGUO. 2001: Semivariogram fitting with linear programming. *Computers & Geosciences* 27(1): 71-76
- CLARK, ISOBEL. 1977: *Practical Geostatistics*. Geostokos Limited, United Kingdom. Versión digital. Consulta: 28-sept-2009. Disponible en: <http://uk.geocities.com/drisobelclark/PG1979>. 119 p.
- DAVID, MICHEL. 1977: *Geostatistical ore reserve estimation*. Elsevier Scientific Publishing Company. New York, 364 p.
- DIEHL, P. & DAVID, M. 1982: Classification of Ore reserve/resources based on Geostatistical Methods. *Bulletin CIM*, February :1-10.
- DEUTSCH, CLAYTON V. & JOURNEL, ANDRÉ G. 1998: *GSLIB: Geoestatistical software library and User's Guide*. Oxford University Press, New York, 369 p.
- DEUTSCH, CLAYTON V. 1996: Correcting for negative weights in ordinary kriging. [Computers & Geosciences 22\(7\)](#): 765-773.
- ESTÉVEZ, E. Y CUADOR-GIL, J.Q. 2003: El kriging indicador y el control de la ley en el yacimiento Oro Castellano. En: V Congreso de Geología y Minería [Memorias]. La Habana, Cuba, 19-24 marzo.

- GARCÍA-GUERRA, P. A. 1988: *Geoestadística Operacional*. Departamento Nacional de Producción Mineral, Ministerio de Minas y Energía, República Federativa de Brasil, Brasilia DF, 145 p.
- GOLDEN SOFTWARE, INC 1999: Surfer® Version 7. User Manual. USA.
- HART, D. & RUDMAN, A. J. 1997: Least-squares fit of an ellipse to anisotropic polar data: application to azimuthal resistivity surveys in Karst regions. *Computers & Geosciences* 23(2): 189-194.
- JIAN, X.; OLEA, R. A. & YUN-SHENG, Y 1996: Semivariogram modeling by weighted least squares. *Computers & Geosciences* 22(4): 387-397.
- KASUO-YAMAMOTO, J. 2000: An Alternative Measure of the Reliability of Ordinary Kriging Estimates. *Mathematical Geology* 32(4): 489-509.
- LEGRÁ-LOBAINA, A. A. 2003: Software Tierra, Versión 2.0. Instituto Superior Minero Metalúrgico. Moa.
- LEGRÁ-LOBAINA, A. A. 1999: Metodología para el Pronóstico, Planificación y Control Integral de la Minería en Yacimientos Lateríticos. Instituto Superior Minero Metalúrgico. Moa [Tesis Doctoral] 187 p.
- PANNATIER, YVAN. 1994: *VarioWin 2.1*. Phd Project. University of Lausanne, Lausanne, Switzerland, 102 p.
- PARDO-IGÚZQUIZA, E. & DOWD, P.A. 2001: VARIOG2D: a computer program for estimating the semi-variogram and its uncertainty. *Computers & Geosciences* 27(5): 549-561.
- VERA, L. O. & LEGRÁ, A. A. 2001: Racionalización de redes en la exploración de los yacimientos lateríticos cubanos. *Minería y Geología* [en línea] 18 (1) Consulta: 25 enero 2010. Disponible en www.ismm.edu.cu/revistamg

Arístides Alejandro Legrá Lobaina

Profesor Auxiliar. Doctor en Ciencias Técnicas. Centro de Estudios de Energía y Tecnología Avanzada. Instituto Superior Minero Metalúrgico. Moa, Cuba.

alegra@ismm.edu.cu

Dulce María Atanes Beatón

Profesora Asistente. Departamento de Hidráulica. Facultad de Civil. Universidad de Oriente. Santiago de Cuba, Cuba.

atanes@fco.uo.edu.cu