

Análisis comparativo de los métodos de Máximo Gradiente y Gauss Seidel para la solución del sistema de ecuaciones de compatibilidad de una armadura hiperestática

Roberto Aimar Támara Chávez rtamarac@unasam.edu.pe

Luz Clarita Roca Muñoz lrocam@unasam.edu.pe

Meyer Junior Asencios Melgarejo masenciosm@unasam.edu.pe

Juliza Ibet Alberto Simeón jalbertos@unasam.edu.pe

Cristofer Joseph Vasquez Támara cvasquezt@unasam.edu.pe

Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo (Perú)

Resumen: Se compararon los métodos iterativos de gradiente máximo y el de Gauss Seidel para encontrar los valores de las fuerzas redundantes externas de una armadura hiperestática, la cual posee un grado de indeterminación externa igual a cinco. Para lograr esto se obtuvo el modelo matemático mediante el método de compatibilidad del análisis estructural; este modelo estuvo dado por un sistema de cinco ecuaciones lineales. La solución de este sistema de ecuaciones representa los valores de las fuerzas redundantes externas; para reducir los cálculos a fin de obtener dichos valores con un error aceptable, se ejecutaron los dos métodos iterativos, adoptando una tolerancia y un punto inicial en común para ambos métodos. Los resultados muestran que el método de Gauss Seidel es más eficaz que el método de gradiente máximo, debido a que el primero realiza menos iteraciones.

Palabras clave: Armadura hiperestática; método de compatibilidad; método del Gradiente Máximo; método de Gauss-Seidel; fuerzas redundantes externas.

Trabajo tutorado por el Dr. Maximiliano Epifanio Asís López
Recibido: 2 enero 2021/ Aceptado: 5 mayo 2021.

Comparative analysis of the methods of maximum gradient and Gauss Seidel for the solution of the system of compatibility equations of a hyperstatic reinforcement

Abstract: The present research aimed to compare the iterative methods of Maximum Gradient and that of Gauss Seidel to find the values of the external redundant forces of a hyperstatic armor, which has a degree of external indeterminacy equal to five. To achieve this, the mathematical model was obtained through the Compatibility method of structural analysis, this model was given by a system of five linear equations. The solution of this system of equations represents the values of the external redundant forces; In order to reduce the calculations in order to obtain these values with an acceptable error, the two iterative methods were executed, adopting a tolerance and a starting point in common for both methods. The results showed that the Gauss Seidel method was more efficient than the Maximum Gradient method, because the former performed fewer iterations.

Keywords: Hyperstatic armature; compatibility method; maximum gradient method; Gauss-Seidel method; external redundant forces.

Introducción

El uso de software por docentes y profesionales en las diferentes asignaturas de la disciplina permite consolidar conocimientos, desarrollar la capacidad de visión espacial, y las habilidades gráficas mediante el uso de la computación, así como elevar la motivación de los estudiantes (González, Silverio y Jiménez, 2006). La introducción de las TIC en la disciplina constituye un paso de avance en el perfeccionamiento de la calidad por cuanto se están utilizando nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje que permiten optimizar el tiempo y contribuir a la formación de profesionales que interpreten, representen y solucionen problemas gráficos de ingeniería, utilizando editores gráficos como herramienta de trabajo.

Sánchez (2018) realizó el análisis de estructuras estáticamente indeterminados, mediante dos métodos: los métodos exactos o directos, como son el método de deflexión pendiente, el método de flexibilidades y el método de rigidez, los cuales, aunque toman un poco más de tiempo realizarlos, otorgan resultados muy confiables y precisos. Para el análisis de armaduras se llegó a la conclusión de que cualquier método que se realice entre ellos (el método de flexibilidades o método de compatibilidad) se puede llegar a resultados exactos y confiables.

León (2019) analiza una armadura hiperestática por el método de compatibilidad (o método de la flexibilidad). Él realiza la resolución, con el método de compatibilidad, de una armadura hiperestática específica sometida a cargas preestablecidas, para esto determina el grado de indeterminación estática, valores de las fuerzas redundantes externas y las fuerzas internas axiales de las barras. En el procedimiento, al aplicar el método de compatibilidad, obtiene la matriz de flexibilidades, compuesta por los coeficientes de flexibilidades, y el vector de desplazamientos; con esta matriz y el vector compone la ecuación matricial, al resolver esta ecuación obtiene los valores de las fuerzas redundantes externas.

Este trabajo propone comparar los métodos de Máximo Gradiente y Gauss Seidel para la solución del sistema de ecuaciones de compatibilidad de una armadura hiperestática.

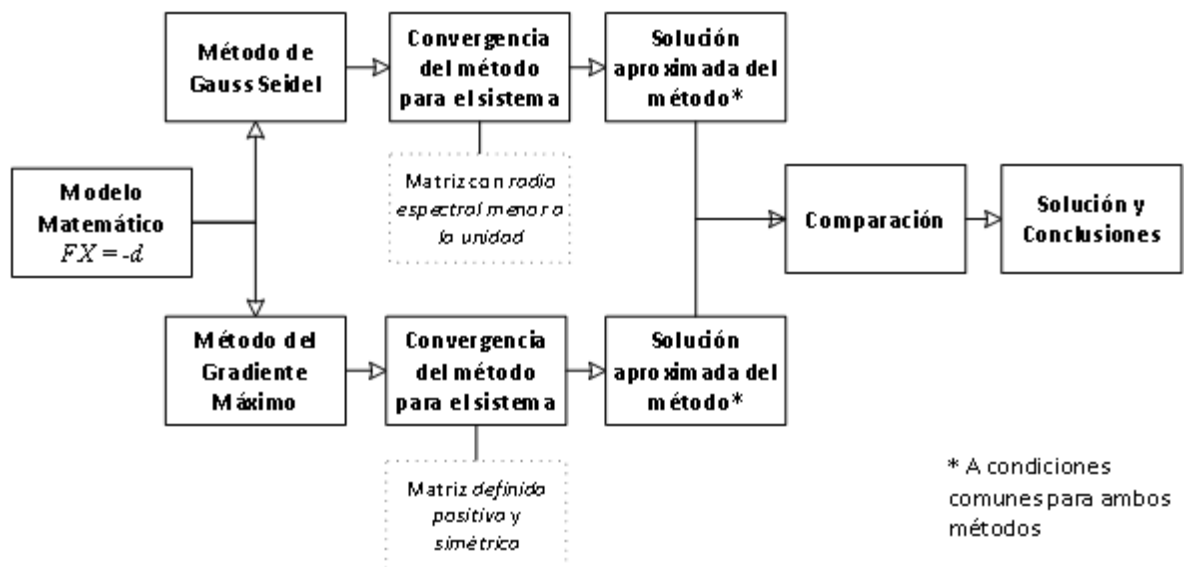
Materiales y métodos

El presente estudio fue del tipo descriptivo debido a que se limita a recolectar información de la armadura hiperestática, tales como el grado de hiperestaticidad, valor de fuerzas redundantes, etc. Además, como se analizó la armadura tal y como es, sin alterar características de los elementos o fuerzas externas, el diseño del estudio fue no experimental. Esta investigación se centra en una armadura específica analizada por León (2019).

El procedimiento seguido consta de dos partes diferenciadas: el modelamiento matemático y aplicación de métodos iterativos. Ambos procesos quedan resumidos en las Figuras 1 y 2.



Figura 1. Pasos del modelamiento matemático.



* A condiciones comunes para ambos métodos

Figura 2. Procedimiento de solución numérica.

El modelamiento matemático consiste principalmente en obtener el sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de compatibilidad; sin embargo, antes de

aplicarlo se debe encontrar el grado de indeterminación externa de la armadura, verificar que sea estable y encontrar sus fuerzas redundantes externas. El grado de indeterminación externa indica el número de fuerzas redundantes externas, así como el número de ecuaciones lineales simultáneas que arrojará el método de compatibilidad. Si la armadura llega a ser estable, entonces se podrá aplicar el método de compatibilidad. Y encontrar las fuerzas redundantes externas permitirá hallar las ecuaciones de compatibilidad. El método de compatibilidad, uno de los métodos del análisis estructural de la ingeniería, permite encontrar el sistema de ecuaciones lineales, es decir, el modelo matemático que caracteriza la armadura hiperestática.

La aplicación de los métodos iterativos tuvo como fin determinar el valor aproximado de las fuerzas redundantes a partir del modelo matemático obtenido; fueron dos métodos iterativos empleados: el método del gradiente máximo y el método de Gauss Seidel. Ambos métodos fueron programados en Octave, de tal manera que ambos programas posean entradas para un punto inicial, una tolerancia, una para la matriz de coeficientes y otra para el vector de desplazamientos. Ambos programas se visualizan en las Figuras 3 y 4.

```
1 function[x, j]=MaxPendiente1(A, b, x0, tol)
2 % Maxima pendiente para resolver Ax=b
3 j=0;
4 x=x0;
5 r=b-A*x;
6 d=r'*r;
7 %tol=sqrt(eps)*norm(b);
8 while sqrt(d)>tol
9     j=j+1;
10    v=A*r;
11    alpha=d/(r'*v);
12    x=x+alpha*r;
13    r=r-alpha*v;
14    d=r'*r;
15 end
16 end
```

Figura 3. Algoritmo de máxima pendiente o gradiente máximo.

```

1 function [x k]=GaussSeidell(A,b,x0,tol)
2 %Resolucion por Gauss-Seidel
3 fprintf('          Metodo de Gauss-Seidel      \n');
4 fprintf('          k                          x\n')
5 n=size(A,1);
6 x=x0;
7 sm=1;
8 k=0;
9 while sm>tol
10     disp([k x'])
11     k=k+1;
12     sm=0;
13     for i=1:n
14         j=[1:i-1 i+1:n];
15         xi=(b(i)-A(i,j)*x(j))/A(i,i);
16         sm=max(abs(x(i)-xi),sm);
17         x(i)=xi;
18     end
19     sm=sm/max(abs(x));
20 end
21 end

```

Figura 4. Algoritmo de Gauss Seidel.

El modelo matemático obtenido anteriormente proporciona la matriz de coeficientes F y el vector de desplazamientos d , de manera que el sistema de ecuaciones es $FX=-d$, donde X es el vector incógnito de fuerzas redundantes externas. Antes de aplicar cualquiera de los dos métodos se verificó que sean convergentes; en el caso del método del gradiente máximo se comprobó que la matriz de coeficientes F es definida positiva y simétrica; para el método de Gauss Seidel, que el radio espectral de F es menor a la unidad. Luego se aplicaron los métodos iterativos, la primera entrada de los programas corresponde a la matriz F , la segunda al vector $-d$, la tercera al punto inicial y la cuarta a la tolerancia. Se introdujo en común, para ambos métodos, el vector inicial y la tolerancia a fin de realizar la comparación de dichos métodos. Octave arrojó los resultados para cada método como se verá en la siguiente sección.

Resultados

Se encontró que la armadura analizada por León posee un grado de hiperestaticidad externa igual a 5, es estable pues su grado de hiperestaticidad total fue mayor a cero, las cinco fuerzas redundantes escogidas fueron las mismas de León. Al aplicar el método de compatibilidad, León se apreció el siguiente sistema de ecuaciones dado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0,0006 & -0,0016 & 0,0006 & -0,0008 & 0,0006 \\ -0,0016 & 0,0683 & -0,0054 & 0,0593 & -0,0062 \\ 0,0006 & -0,0054 & 0,0013 & -0,0046 & 0,0013 \\ -0,0008 & 0,0593 & -0,0046 & 0,0683 & -0,0062 \\ 0,0006 & -0,0062 & 0,0013 & -0,0062 & 0,0019 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,14757 \\ 7,36405 \\ -0,58705 \\ 7,25367 \\ -0,72625 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1)$$

En el proceso se consideró el módulo de elasticidad de los elementos como $E=20\ 389\ 019,2\ \text{t/m}^2$ y el área de sección transversal $A= 0,00366\ \text{m}^2$.

Seguidamente, se pasó a verificar la convergencia de ambos métodos iterativos. Para el vector de coeficientes F se examinó que los determinantes de sus menores principales fueron mayores a cero, con lo cual se conformó que el método de gradiente máximo es convergente. Para la misma matriz F , el radio espectral de esta fue igual a $0,79644$, es decir, menor a la unidad; por tanto, se confirmó que el método de Gauss Seidel es convergente.

Se consideró el vector inicial al vector nulo y una tolerancia comunes para ambos métodos iterativos. Las entradas de los programas fueron: $A=F$, $b=-d$, $x_0=[0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ y $\text{tol} = \text{sqrt}(\text{eps}) * \text{norm}(-d)$. Al ejecutar los programas, cada uno arrojó una solución aproximada y el número de iteraciones hechas, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Resumen de resultados (en t). Se muestra los resultados según León (2019), método gradiente máximo y método de Gauss Seidel en las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente

Fuerza redundante	Resultados de León	Método de gradiente máximo (3 479 iteraciones)	Método de Gauss Seidel (70 iteraciones)
X1	15,922	15,928	15,929
X2	62,747	62,705	62,705
X3	-12,174	-12,201	-12,202
X4	50,079	50,079	50,079
X5	-11,082	-11,512	-11,512

Discusión

Los programas de ambos métodos (gradiente máximo y Gauss-Seidel) fueron ejecutados para la matriz de coeficientes (matriz de compatibilidad) y el vector de términos independientes (negativo del vector de desplazamientos) dados en sistema de ecuaciones lineales (1) para resolver dicho sistema, con el mismo punto inicial (el vector nulo) y con el mismo valor de la tolerancia. En la Tabla 1 se muestran los resultados y los valores calculados por León (2019).

Según el estudio de Sánchez (2018), el método de flexibilidad otorga resultados muy confiables y precisos al analizar armaduras hiperestáticas; es por esto que las soluciones dadas por ambos métodos iterativos tienen un alto grado de confiabilidad.

Sin embargo, entre los resultados de los métodos de gradiente máximo y Gauss-Seidel de la Tabla 1, se puede observar que este último obtiene la solución con tan solo 70 iteraciones, mientras que el método de gradiente máximo lo hace con 3 479 iteraciones (ambas con un error por debajo de la tolerancia fijada y con el mismo punto inicial). Por tanto, se percibe que el método de Gauss-Seidel es más eficaz en contraste con el método de gradiente máximo. Entonces, la solución de la ecuación (1) es la obtenida con el método de gradiente máximo:

$$X_1=15,928 \text{ t}$$

$$X_2=62,705 \text{ t}$$

$$X_3=-12,201 \text{ t}$$

$$X_4=50,079 \text{ t}$$

$$X_5=-11,512 \text{ t}$$

Si bien se pudo encontrar que el método de Gauss Seidel es más eficaz frente al método de gradiente máximo, las razones por las que esto sucede se pueden explicar fundamentándose en hechos más abstractos sobre el actuar de cada método, es decir, realizando un escrutinio del comportamiento de cada uno de los métodos, en este caso particular; análisis que está fuera de los objetivos planteados en esta investigación.

Los valores de las fuerzas redundantes externas calculadas por León (2019) se aproximan a la solución de esta investigación, tal como se puede observar en la Tabla 1. Para encontrar estos valores, León (2019) calcula la inversa de la matriz de compatibilidad, luego, el producto de esta inversa con el vector de términos independientes con lo cual obtiene los valores. Él no menciona el método con que obtiene la matriz inversa, por esta razón no se realiza una comparación de sus resultados con los de esta investigación.

La aplicación de programas, de los métodos iterativos de Gauss Seidel y gradiente máximo, en Octave para la resolución del sistema de ecuaciones lineales, permite el ahorro de tiempo empleado en los cálculos que de otra manera serían manuales; debido a esto, y según Rodríguez, Figueredo y Alfonso (2006), la tecnología usada permite

obtener un tiempo adicional que será empleado en el análisis de los resultados, como se ha planteado anteriormente.

Conclusiones

Mediante el método de compatibilidad se analiza la armadura hiperestática, pues, al aplicarlo, se encuentra que el grado de indeterminación estática externa de esta armadura es igual a cinco; en consecuencia, se hallan los valores de cinco fuerzas redundantes externas. Además, con este método se obtiene el modelo matemático de la armadura dado por el sistema de cinco ecuaciones lineales simultáneas. Para solucionar este sistema de ecuaciones se aplican dos métodos numéricos iterativos: del gradiente máximo y el de Gauss Seidel.

Ambos métodos iterativos resultan ser eficientes pues con ellos se obtienen soluciones para las ecuaciones de compatibilidad. Sin embargo, el método de gradiente máximo es menos eficaz que el método de Gauss-Seidel, con respecto a la cantidad de iteraciones realizadas, ya que este último consigue la solución en un menor número de iteraciones.

Referencias bibliográficas

- GONZÁLEZ, E. R.; SILVERIO, M. F. & JIMÉNEZ, M. A. 2006. Las TIC en las asignaturas gráficas de ingeniería mecánica y su influencia en el perfeccionamiento de las habilidades. *Quaderns digitals: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad* (43): 11.
- LEÓN, D. 2019. *Análisis estructural de una armadura plana hiperestática por el método de flexibilidad*. Consultado: 18/10/2020. Disponible en: <http://repositorio.utmachala.edu.ec/bitstream/48000/14505/1/ECFIC-2019-ICI-DE00020.pdf>
- RODRÍGUEZ, E.; FIGUEREDO, M. & ALFONSO, M. 2006. *Las TIC en las asignaturas gráficas de ingeniería mecánica y su influencia en el perfeccionamiento de las habilidades*. Consultado: 15/10/2020. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2037608>
- SÁNCHEZ, D. A. 2018. *Eficacia y eficiencia de los distintos métodos de solución de sistemas estructurales estáticamente indeterminados en el plano según las condiciones de aplicación*. Tesis doctoral. Academia de Ingeniería Civil. Instituto Tecnológico de

TEPIC. Consultado: 15/10/2020. Disponible en:
https://www.researchgate.net/profile/Damian-Andrade/publication/335675784_Eficacia_y_eficiencia_de_los_distintos_metodos_de_solucion_de_sistemas_estructurales_estaticamente_indeterminados_en_el_plano_segun_las_condiciones_de_aplicacion/links/5d7309fc4585151ee4a3da80/Eficacia-y-eficiencia-de-los-distintos-metodos-de-solucion-de-sistemas-estructurales-estaticamente-indeterminados-en-el-plano-segun-las-condiciones-de-aplicacion.pdf