

Análisis y solución de la avería del árbol de una bomba centrífuga de la Central Termoeléctrica de Cienfuegos por desgaste en la zona de la empaquetadura^{*}

Adrián Bernal Leyva

Carrera: Ingeniería Mecánica.

Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez" (Cuba).

Resumen: En el trabajo se aplica el nuevo método de cálculo desarrollado para árboles de bombas centrífugas que considera la rigidez angular de los cojinetes de rodamiento de apoyo y a las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios, durante los cálculos realizados para la recuperación de la bomba de sulfato de alúmina utilizada en el proceso de desmineralización del agua en la Central Termoeléctrica de Cienfuegos "Carlos M. de Céspedes". Esta bomba se averió debido al desgaste del árbol en la zona de la empaquetadura después de más de dos décadas de explotación. Para la recuperación de la misma se procedió a la fabricación de un casquillo del mismo acero inoxidable del árbol, que se prensó en la zona de contacto del árbol con la empaquetadura. Aplicando la metodología mencionada se calculó la fuerza de reacción en la empaquetadura y el momento flector del árbol en esa zona y se realizaron las correspondientes comprobaciones de resistencia.

Palabras clave: Central Termoeléctrica de Cienfuegos; árbol de bomba centrífuga; desgaste; avería.

Centrifugal Pump Shaft Failure Caused by Wear in the Packing Area Cienfuegos Power Station. Failure Analysis and Solution

Abstrac: This work presents the application of a new method for the calculation of centrifugal pump shafts based angle rigidity of supporting roller bearings and packing as supplementary elastic supports in the calculations completed for repair of an alumina sulfate pump operated for pumping water demineralization at the Cienfuegos Power Station "Carlos M. de Céspedes". Failure of this pump was caused by shaft wear in the area of packing after over two decades in operation. To restore the pump, it was required to manufacture a new casing of the same stainless steel the shaft was made of. The casing was attached to the contact area between the shaft and the packing. The shear stress in the packing and the bending moment for the shaft in this area were calculated by using the abovementioned methodology and the corresponding resistance testing was carried out.

Key words: Cienfuegos Power Stattion, centrifugal pump shaft, wear, failure.

Introducción

Los esquemas de análisis de los apoyos rígidos clásicos utilizados en los sistemas planos en la literatura de Mecánica Teórica se muestran en la Figura 1. En la literatura técnica, en general, se utilizan otros apoyos articulados que consideran las propiedades elásticas de los apoyos. Estos modelos se muestran en la Figura 2. En la literatura de Mecánica Teórica, Bedford y Fowler (2002), y Beer y Johnston (1984) sólo hacen referencia a los apoyos rígidos clásicos; ningún autor reseña otro tipo de apoyo que contemple una rigidez intermedia entre los apoyos articulados y los empotrados.



Figura 1. Esquemas de análisis clásicos. a) Apoyo articulado rígido móvil.b) Apoyo articulado rígido fijo. c) Empotramiento rígido.



Figura 2. Esquema de análisis del apoyo articulado a) Elástico móvil. b) Elástico fijo.

En la literatura sobre Mecánica de Materiales, la mayoría de los autores se refieren casi exclusivamente a los apoyos rígidos clásicos, sin contemplar la elasticidad de los apoyos: Beer y Johnston (1993), Fogiel (1988), Spiegel y Limbrunner (1999). Otro grupo de autores aborda de alguna manera los apoyos elásticos mencionados anteriormente: Feodosiev (1985), Pisarenko (1989) y sólo en Olsen (1962) se menciona la posibilidad de que los empotramientos no sean perfectamente rígidos, pero sin profundizar en las cualidades ni en el modelo físico-matemático de este tipo de esquema de análisis, ni en los procedimientos de cálculo.

En la literatura de Diseño de Elementos de Máquinas los autores se refieren en mayor medida a los aspectos vinculados con la rigidez de los apoyos y a los diferentes posibles esquemas de análisis al situar las reacciones en los mismos, así por ejemplo: Wilson (1997), al referirse a las reacciones en los elementos sometidos a flexión, señala que los soportes son usualmente idealizados con el objetivo de simplificar el análisis y añade que el soporte simple consiste en una fuerza concentrada resultante como reacción. Este tipo de soporte es utilizado para representar cajas de bolas, rolletes, cojinetes de deslizamiento y otros soportes que permiten alguna rotación o pendiente en el plano durante la deformación por flexión. "Si el soporte de la viga no permite movimiento relativo a lo largo del eje de la misma, entonces surgirá una restricción adicional que provocara una fuerza axial como resultado de dicha restricción". Este efecto axial se desprecia siempre en los problemas de diseño de máquinas y continúa diciendo: "El apoyo empotrado proporciona como reacciones una fuerza y un momento que no permiten rotación alguna en el plano de la deflexión del elemento. La pendiente de la curva elástica del elemento es cero en el apoyo empotrado, los que son utilizados para representar soportes muy rígidos". Cuando se refiere a las reacciones en los cojinetes en el diseño de árboles explica que: "generalmente los mismos están soportados por dos cojinetes, como regla, los cuales son considerados como soportes simples o simples apoyos". Al construir diagramas de momentos flectores, tanto en elementos sometidos a flexión como en el diseño de árboles, sólo se refiere a los apoyos clásicos y sus reacciones correspondientes.

Los autores que abordan el Método de los Elementos Finitos (MEF) Wilson (1997), Zienkiewics (2000) emplean diferentes tipos de elementos que se diferencian por su forma, a través de las posiciones relativas de sus nodos y por los grados de libertad, es decir por las posibles direcciones del movimiento de cada nodo. Eligiendo adecuadamente estos elementos en las zonas de apoyo es posible modelar apoyos con diferente rigidez y lograr una mayor aproximación a la realidad que en los clásicos apoyos articulados y empotrados. Esta cualidad del Método de los Elementos Finitos puede ser utilizada en la práctica para lograr aproximaciones más exactas.

El colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos ha definido dos nuevos tipos de apoyos elásticos: el empotramiento elástico y el empotramiento parcialmente elástico (Figura 3) y ha determinado experimentalmente (Goytisolo *et al.*, 2006; Hidalgo *et al.*, 2009), el coeficiente de rigidez de los cojinetes de rodamientos más comunes al ser utilizados como apoyos en árboles. Una caja de bolas radial de doble hilera autoalineante se comporta a la flexión prácticamente como una articulación rígida, sin embargo, una caja de bolas radial rígida de simple hilera se comporta como un empotramiento parcialmente elástico con un coeficiente de rigidez $\varphi = 0,346$.



Figura 3. a) Empotramiento elástico. b) Empotramiento parcialmente elástico.

La importancia práctica de considerar la rigidez angular de los cojinetes de rodamientos y las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios es que estos elementos modifican completamente la forma y los valores de los momentos flectores que provocan las cargas externas sobre el árbol y por lo tanto pueden decidir de forma favorable o desfavorable en sus dimensiones.

Se plantean entonces los siguientes objetivos:

 Aplicar para la construcción del diagrama de momentos flectores del árbol de la bomba centrífuga objeto de estudio el método de cálculo elaborado que contempla la rigidez angular de los cojinetes de rodamientos y la elasticidad lineal de la empaquetadura considerada como un apoyo elástico suplementario. Evaluar la resistencia a flexión del árbol recuperado en la zona de la empaquetadura y la capacidad de la unión por interferencia del casquillo para evitar el giro del mismo bajo el par de fricción de la empaquetadura.

Análisis y solución de la avería del árbol de una bomba centrífuga

Para calcular la fuerza de reacción que existe en la empaquetadura considerada como apoyo elástico suplementario se hace necesario utilizar un nuevo esquema de análisis para el cálculo de árboles de bombas centrífugas que considera precisamente las empaquetaduras de las bombas como apoyos elásticos suplementarios que es como ellas operan en la realidad y considera además la rigidez angular de los cojinetes de rodamientos.

En la Figura 4 se muestra el esquema de la bomba y del árbol y en la Figura 5 su esquema de análisis con la carga P_i que representa el peso propio del impelente P_i = 1,71 N, la fuerza radial del fluido sobre el impelente F_r = 500 N, el peso propio del árbol Q=4,71 N, el cual será considerado como una carga uniformemente distribuida q=2,01 N/cm, la empaquetadura es considerada como una articulación móvil elástica, dos rodamientos de bolas radiales rígidos considerados como empotramientos parcialmente elásticos.



Figura 4. Esquema de la bomba y disposición de los apoyos y empaquetaduras en la bomba centrífuga de simple etapa objeto de estudio.

Para resolver este sistema con apoyos elásticos en las empaquetaduras y empotramiento parcialmente elástico en la caja de bolas radial de simple hilera del apoyo izquierdo primero hay que resolver el sistema hiperestático con los cojinetes considerados como empotramientos rígidos para hallar el momento flector que surge en los mismos, ya que en los empotramientos parcialmente elásticos el momento flector se halla como: $M_f = \phi M_{emp}$

Donde ϕ es el coeficiente de rigidez del empotramiento parcialmente elástico, que para una caja de bolas radial rígida de simple hilera, experimentalmente, se ha demostrado

que ϕ =0,346 y para una de doble hilera ϕ =0,6 (Goytisolo *et al.*, 2006; Hidalgo *et al.*, 2009).



Figura 5. Esquema de análisis del árbol con todas las cargas que actúan sobre él, con empotramientos rígidos.

Las ecuaciones canónicas del Método de las Fuerzas para el caso analizado, el cual se trata de un sistema hiperestático con tres grados de hiperestaticidad son:

 $\begin{array}{l} \delta_{11}X1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{1q} + \delta_{1p} = -X_1 / \Box_{emp.} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_2 + \delta_{2q} + \delta_{2p} = 0 \end{array}$

 $\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{3q} + \delta_{3p} = 0$

Para hallar los coeficientes de las ecuaciones es necesario construir los diagramas unitarios de las incógnitas, los de las cargas concentradas P y el diagrama de la carga distribuida q. Para hallar los términos independientes correspondientes a los desplazamientos provocados por las cargas se aplicó el Principio de la Superposición ya que existen dos cargas concentradas (Peso propio del impelente y la fuerza radial del flujo) y una carga uniformemente distribuida a lo largo de toda la longitud correspondiente al peso propio del árbol. Todos estos coeficientes, tanto los de las incógnitas como los términos independientes, se hallan por las Integrales de Mohr multiplicando los gráficos de las fuerzas correspondientes mediante la Regla de Vereschaguin. Los cálculos de estos coeficientes y los resultados de la solución del sistema de ecuaciones canónicas se obtuvieron suministrando los datos de la bomba objeto de estudio a un software elaborado por el colectivo de Mecánica Aplicada de la Universidad de Cienfuegos que considera las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y valora además los momentos que se inducen en los rodamientos al considerar estos como empotramientos parcialmente elásticos (Goytisolo *et al.*, 2011).

Los valores de las incógnitas obtenidos son: $X_1 = 903,73$ N, $X_2 = 403,67$ N y $X_3 = 6,56$ N. Los diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores para el árbol con la consideración de la empaquetadura como apoyo elástico y los dos rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos se muestran en la Figura 6.



Figura 6. Diagramas de fuerzas de cortante y momentos flectores del árbol, considerando las cargas concentradas, el peso del árbol como una carga uniformemente distribuida y considerando la acción de la empaquetadura y la rigidez al giro de los rodamientos.

El momento flector máximo con la consideración de las empaquetaduras como apoyos elásticos y las cajas de bolas radiales de simple hilera de ambos apoyos como empotramiento elástico da $Mf_{máx.} = 2$ 924,84 N-cm, precisamente en la zona de la empaquetadura. Para solucionar el problema del desgaste del árbol en la zona de la empaquetadura se prensó un casquillo del mismo acero inoxidable del cual está fabricado el árbol de la bomba, pero ahora una parte del momento flector en esa sección la asimila el casquillo y otra parte la asimila el árbol. Se tienen que cumplir las siguientes relaciones:

$$M_{f} = M_{fa} + M_{fc}.$$

$$\frac{Mfa}{Mfc} = \frac{EIa}{EIc} = \frac{Ia}{Ic},$$

$$I_{a} = \frac{\pi \cdot d4}{64} e I_{c} = \frac{\pi \cdot D4}{64} - \frac{\pi \cdot d4}{64}$$

$$M_{fc} = M_{fa} \cdot \frac{Ic}{Ia}$$

$$M_{fa} = \frac{Mfmax}{(1+\frac{Ic}{Ia})} = 1462,42 \text{ N} \cdot \text{cm} = 1,462 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Ese es el momento flector que asimila el árbol, el resto la asimila el casquillo.

Como $I_c = I_a$ entonces $D_c = 29,7$ mm y d = 25 mm.

El diámetro real del casquillo es mayor por lo que resistirá más que el árbol por lo que se comprobará solo la resistencia del árbol.

$$\sigma_{flex} = \frac{Mf_{B}}{Wa} = \frac{Mf_{a}}{\frac{\pi \cdot d^{2}}{52}} \le [\sigma] \qquad \qquad \sigma_{flex} = \frac{1.46242 \cdot 32}{3.14 \cdot 2.5^{2}} = 0.95 \text{ kN/cm}^{2}$$

Dobrolvolski (1991) recomienda para árboles sometidos a flexión en rotación, para evitar la fatiga en el árbol.

$$[\sigma] = \frac{0.33 \cdot \sigma u}{3.8} = 62,5 \text{ MPa} \approx 6,25 \text{ kN/cm}^2$$

La tensión admisible en el árbol para régimen III, o sea, para ciclo simétrico es casi siete veces mayor que la tensión de flexión por lo que la resistencia a flexión del árbol está garantizada.

Para el ajuste prensado del casquillo se seleccionó el ajuste H7/r6. La interferencia mínima de este ajuste es de A_{min} =0,007 mm y la interferencia máxima es A_{max} = 0,049 mm.

El cálculo de la unión por interferencia tiene dos objetivos fundamentales:

- Comprobar que el apriete mínimo sobre las piezas garantice que estas no se deslicen por la acción del par de fricción.
- Calcular el apriete máximo que admiten el casquillo y el árbol, para que no fallen durante el ensamblaje.

La capacidad portante de la unión depende del apriete que se logre con el ajuste seleccionado. Producto de ese apriete, en las superficies acopladas surge una presión específica (p), debido a la deformación elástica de las piezas unidas, que se puede calcular por la expresión:

$$\mathsf{p} = \frac{\delta}{d \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2}\right)} \quad \mathsf{MPa}$$

Donde:

 δ – Apriete en la unión, mm

d - Diámetro nominal de las piezas unidas, mm

C₁ y C₂ – Coeficientes de Lamé

$$C_1 = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \mu_1$$
 $y \quad C_2 = \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} + \mu_2$

μ – Coeficiente Poisson

 d_1 – Diámetro interior de la pieza interna, mm. En el caso de un árbol macizo d_1 = 0

d₂ – Diámetro exterior de la pieza externa, mm

De la ecuación de Lamé se puede concluir claramente que la capacidad portante es proporcional al apriete alcanzado y se incrementa con el módulo de elasticidad de los materiales de la unión. Es evidente que una vez que se conozca la presión máxima que soportan los elementos de la unión se puede determinar el apriete máximo que soportará la unión. Para el apriete máximo del ajuste seleccionado se puede calcular la presión máxima sobre el casquillo.

Datos:

$$\mu = 0,03, \ d_1 = 0, \ d_2 = 28.9 \ \text{mm, } d = 25 \ \text{mm, } E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \ \text{MPa}$$

$$C_1 = \frac{25^2}{25^2} - 0.3 = 0.7 \ \text{y} \quad C_2 = \frac{28.9^2 + 25^2}{28.9^2 - 25^2} + 0.3 = 7.25$$

$$p_{\text{máx}} = \frac{0.049}{25 \cdot \left(\frac{0.7}{2 \cdot 10^5} + \frac{7.25}{2 \cdot 10^5}\right)} = 49.3 \ \text{MPa}$$

La distribución de tensiones en las piezas de una unión por interferencia se obtienen a partir del estudio de los tubos de paredes gruesas ya que la pieza exterior se puede considerar un tubo sometido a presión interior y la interior un tubo sometido a presión exterior. En la Figura 7 se muestra la distribución de las tensiones radiales y tangenciales en estas uniones.



Figura 7. Distribución de tensiones en una unión por interferencia (Dobrovolski, 1991).

De la figura se concluye que las máximas tensiones ocurren en la superficie interna de la pieza que contiene.

$$\sigma_{r1} = -p$$

$$\sigma_{t1} = p \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{d}{d_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^2} \right] = p \cdot \frac{d_2^2 \left(1 + \left(\frac{d}{d_2}\right)^2\right)}{d_2^2 \left(1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^2\right)}$$

Determinado entonces la tensión equivalente por la Teoría de las Tensiones Tangenciales Máximas (3ra hipótesis) podemos determinar la presión máxima que soporta la pieza exterior.

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{t1} - \sigma_{r1} = p \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{d}{d_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^2} + 1 \right] < (\sigma)$$

$$\sigma_{eq. max.} = \frac{2 \cdot P_{max}}{1 \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^2} < (\sigma)$$
$$(p_{max}) = \frac{\left[\sigma\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^2\right]}{2 \cdot k}$$

k es la relación entre el límite de resistencia a compresión y a tracción del material de la pieza exterior. En el caso de materiales dúctiles k = 1.

La tensión admisible del acero utilizado será: (σ) = σ_f /1.2 = 500/1,2 = 416.7 MPa.

$$(p_{max}) = \frac{\left[416,7\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{25}{28,9}\right)^2\right]}{2 \cdot 1} = 52,1MPa$$

Como $p_{max} < (p_{max})$ el ajuste seleccionado es adecuado, el casquillo soporta la presión del ajuste por interferencia. En la pieza interior la tensión máxima se produce también en la superficie interior y se determina como:

$$\sigma_{2t} = \frac{2 \cdot p}{1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2} < (\sigma) \qquad \qquad p_{max} = \frac{\left[\sigma \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right)}{2 \cdot k}\right]$$

Si se trata de un árbol macizo de material dúctil: $p_{max} = (\sigma)/2$. En el caso analizado la presión máxima permisible por el árbol es $(p_{max}) = 208$ MPa. El árbol resiste sin problemas.

Para determinar el apriete mínimo admisible en la unión para garantizar que soporte las cargas actuantes es necesario analizar el carácter de estas. En el caso objeto de estudio del presente trabajo la unión tiene que soportar un par de torsión igual a la reacción en la empaquetadura multiplicada por el coeficiente de fricción entre empaquetadura y árbol y por el radio del árbol. La condición de resistencia de la unión se da cuando el momento a transmitir sea menor que el momento que resiste la unión por interferencia.

El momento de fricción en la zona de empaquetadura es igual a la reacción X_1 por el coeficiente de fricción por el radio del árbol. El coeficiente de fricción varía en un amplio rango dependiendo del material de este, y de la presencia de agua o líquidos en contacto con el árbol. El cálculo de la unión por interferencia entre casquillo y árbol se realiza para evitar el giro del casquillo por la acción del momento de fricción, de aquí que se tomará un coeficiente de fricción seco grande:

f = 0,4

$$M_{fr} = X_1 \cdot f \cdot \frac{d}{2} = 903,73 \cdot 0,4 \cdot \frac{2.5}{2} = 451,87 \text{ N} \cdot \text{cm}$$

Y el apriete mínimo necesario será:

$$\delta_{\min} = \frac{Mt \cdot 2}{f \cdot \pi \cdot d \cdot l} \cdot \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2} \right)$$

$$\delta_{\min} = \frac{451,87 \cdot 2}{0,4 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 50} \cdot \left(\frac{0,7}{2 \cdot 10^5} + \frac{7,25}{2 \cdot 10^5} \right) = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$$

La interferencia mínima del ajuste seleccionado es $\delta_{min} = 0.007$ mm da mayor que la necesaria por lo que el casquillo no desliza sobre el árbol.

Conclusiones

Se utilizó un esquema de análisis para el árbol novedoso y mucho más exacto que el clásico, en el cual se consideran las empaquetaduras como apoyos elásticos suplementarios y los cojinetes de rodamientos como empotramientos parcialmente elásticos. El empleo de este esquema permitió, por un lado, calcular la fuerza que ejerce el árbol sobre la empaquetadura y evaluar en el mismo la posibilidad de que el casquillo gire o no, y por otro lado, permitió evaluar la resistencia del árbol después de rebajado para encasquillar.

El casquillo empleado para solucionar el desgaste del árbol en la zona de la empaquetadura se ajustó por interferencia al árbol; se eligió el ajuste adecuado y se comprobó que su resistencia a la presión máxima provocada por la interferencia es adecuada.

La interferencia mínima del ajuste garantiza que el casquillo no se deslice.

Del análisis se aprecia que el encasquillado del árbol no afecta la resistencia de esa zona del mismo; la tensión de trabajo es menor que la permisible lo que permite afirmar que la resistencia a la flexión del mismo es adecuada.

Referencias bibliográficas

- BEDFORD, A.; FOWLER, W. 2002: *Engineering Mechanics. Statics*. Third Edition, New Jersey: Prentice Hall, 583 p.
- BEER, F.; JONHSTON, E. 1984: *Mecánica Vectorial para Ingenieros*. México, Mc Graw-Hill, 972 p.
- BEER, F.; JONHSTON, E. 1993: *Mecánica de los Materiales*. Colombia, Mc Graw–Hill, 738 p.

FEODOSIEV, V. I. 1985: Resistencia de Materiales. 3ª edición. Moscú, MIR, 583 p.

FOGIEL, M. 1988: *Problem Solver in Strength of Materials and Mechanics of Solids.* New Jersey, Editorial REA, 1140 p.

- GOYTISOLO *et al.* 2011: Cálculo de árboles de bombas centrífugas considerando la elasticidad de los cojinetes y empaquetaduras. V Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y III de Ingeniería Mecatrónica. Bogotá.
- GOYTISOLO, R.; HIDALGO, C.; NODAL, F.; Noa, J. G. 2006: Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes cojinetes de rodamientos. Tercer Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica y Primero de Mecatrónica, Bogotá, Colombia.
- HIDALGO, C.; DR. RAFAEL GOYTISOLO ESPINOSA (Tutor). 2009: Estudio teórico y experimental del coeficiente de rigidez de los apoyos en árboles con diferentes tipos de cojinetes de rodamientos. Tesis de Maestría en Mecánica Aplicada. Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad de Cienfuegos.
- OLSEN, G. A. 1962: *Elements of Mechanics of Materials*. La Habana, Editora de la Asociación de Estudiantes de Ingeniería, 536 p.
- PISARENKO, G. *et al.* (1989) *Manual de Resistencia de Materiales*. Moscú, Editorial MIR, 694 p.
- SPIEGEL, L.; LIMBRUNNER G. F. 1999: *Applied Statics and Strength of Materials*. Third Edition. New Jersey, Prentice Hall, 644 p.
- WILSON, CH. 1997: *Computer Integred Machine Design*. New Jersey, Prentice-Hall, 646 p.
- ZIENKIEWICS, O. C.; TAYLOR, R. L. 2000: *The Finite Element Method*. Volume I. The Basics. Oxford, Butterworth-Heinemann, 748 p.

La imagen de cabecera fue tomada del sitio http://www.toniweb.com/index.php/cuba/ cienfuegos/central_termica_1

^{*}Trabajo presentado en el XIX Fórum Científico Nacional de Estudiantes Universitarios de Ciencias Técnicas. Tutorado por el Dr. Rafael Goytisolo Espinosa y el ingeniero Israel García Rodríguez.