

Evaluación de modelos 2D de variables geotecnológicas en un bloque de un yacimiento laterítico cubano. 3ra Parte: Funciones de base radial

Arístides A. Legrá-Lobaina
Ricardo Quevedo-Mejías
Marledis Pupo-Mulgado

Resumen

El uso de funciones de base radial para modelar el comportamiento espacial de propiedades de objetos naturales y tecnológicos es uno de los métodos que aparecen frecuentemente en investigaciones recientes; sin embargo, en Cuba aún no se aplican al estudio de las variables tecnológicas mineras y metalúrgicas, tales como el espesor de la corteza laterítica y las concentraciones de los elementos químicos de interés en los procesos metalúrgicos. En este trabajo se estudia la posibilidad de modelar 2D, mediante funciones de base radial, las variables: espesor de la corteza (L) y concentraciones de níquel (Ni), hierro (Fe) y cobalto (Co) en un bloque de un yacimiento laterítico cubano.

Palabras clave: modelación; yacimiento laterítico; red de muestreo; estimación; función de base radial.

Assessing the 2D models of geo-technological variables in a block of a cuban lateritic ore body: 3th part: Radial base functions

Abstract

The implementation of radial base functions to model the spatial behavior of the properties of natural and technological objects is one of the most frequently used methods in the latest investigations; however, it has not been yet applied in Cuba in the analysis of mining and metallurgical technological variables, such as crust thickness and the concentrations of chemical components that are key in the technological process. The objective of this work is to assess the option of modeling in 2D through radial base functions, the thickness variable (L) and the concentrations of nickel (Ni), iron (Fe) and cobalt (Co) in a Cuban lateritic ore body block.

Keywords: modeling; lateritic ore body; sampling grid; estimation; radial base function.

1. INTRODUCCIÓN

La modelación del comportamiento tridimensional (3D) de una propiedad de interés e en un yacimiento consiste en obtener una expresión o un algoritmo matemático capaz de generar una red de puntos ($x_j; y_j; z_j; e_j$) que faciliten el estudio de su comportamiento (Legrá-Lobaina 1999).

Dado la conocida complejidad de la modelación 3D de las concentraciones de elementos químicos en los yacimientos lateríticos ferro-niquelíferos (Quador-Gil 2005; Barnett et al. 2012; Ilyas et al. 2012), en ocasiones se realizan modelaciones 2D, considerando los valores promedios verticales en cada punto del plano, de manera que la red de puntos generados es ($x_j; y_j; E_j$). En este caso, también es de interés la longitud L, espesor de la corteza (Legrá-Lobaina 2015).

Para su exploración y explotación, el yacimiento Punta Gorda fue dividido en bloques administrativos cuadrados de 300 m 300 m (Legrá-Lobaina 1999; Quador-Gil 2005; Martínez & Pérez 2006). Cada bloque fue explorado en dos etapas.

- La primera, llamada red de exploración (R1), se realizó mediante una red de hasta 81 pozos equidistantes, a una distancia de 33,33 m uno de otro en cada dirección este-oeste y sur-norte.
- La segunda, llamada red de explotación (R2), se realizó mediante una red de hasta 361 pozos, a una distancia de $D=16,16$ m uno de otro en cada dirección este-oeste y sur-norte.

El estudio del bloque O48 (agotado actualmente) tuvo un tratamiento especial ya que se le realizó una nueva red (R3) de hasta 1 369 pozos equidistantes, a una distancia de $D=8,33$ m uno de otro en cada dirección geográfica.

Los modelos de recursos y de reservas que se obtuvieron en el bloque O48 se desarrollaron considerando la red R1, o sea, con una densidad de red menor que las densidades de las redes R2 y R3. Los métodos empleados generalmente han sido los geoestadísticos y el inverso de una potencia de la distancia (Quador-Gil 2005; Martínez & Pérez 2006; Legrá-Lobaina 2015).

El objetivo del presente trabajo fue determinar, mediante los errores relativos absolutos, la efectividad del método de las funciones de base radial, asumida como modelo 2D, que pronostica los valores de L, Ni, Fe y Co en el bloque O48 del yacimiento Punta Gorda.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Datos propuestos y análisis inicial

Tal como se ha mencionado (Legrá-Lobaina 2015) a partir de los datos del Ni, Fe y Co tabulados en R_3 se determinó un archivo que contiene n filas con 6 columnas:

- X (coordenada en la dirección este-oeste)
- Y (coordenada en la dirección sur-norte)
- L (longitud o grosor de la corteza de intemperismo)
- Ni (concentración, porcentual, del níquel)
- Fe (concentración, porcentual, del hierro)
- Co (concentración, porcentual, del cobalto)

En el archivo mencionado se tiene una red de $8,33 \text{ m} \times 8,33 \text{ m}$ y de este se han identificado los datos de las redes R_1 y R_2 .

2.2. Método de las funciones de base radial

Sea el conjunto de m puntos denominado G :

$$G = \left\{ (P_i; U_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, m; P_i = (x_{i1}; x_{i2}; \dots; x_{in}); U_i \in R \right\}$$

Se denomina d_{ij} a la distancia euclidiana entre los puntos P_i y P_j de R^n (Bronshtein *et al.* 2007). Esta distancia está dada por la Ecuación 1.

$$d_{ij} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \dots + (x_{in} - x_{jn})^2} \quad (1)$$

En particular la distancia euclidiana entre el punto P_i y el punto $P_e = (x_{e1}; \dots; x_{en})$ se define por la Ecuación 2.

$$d_{ie} = \sqrt{(x_{i1} - x_{e1})^2 + (x_{i2} - x_{e2})^2 + \dots + (x_{in} - x_{en})^2} \quad (2)$$

Ahora se define la función $F(h)$ denominada Función de Base Radial (FBR) de soporte global que es continua y fija y tiene su dominio en el conjunto de números reales no negativos y su imagen es R (Branch, Prieto & Boulanger 2007). Puede contener, además, un parámetro libre R positivo, llamado "parámetro de forma" (Echeverri-Arias *et al.* 2009).

Entre las más conocidas FBR están las expresadas por las ecuaciones representadas desde (3) hasta (7) (Sánchez-Torres & Branch 2009; Golden Software 2012):

$$\text{(IM) Inversa Multicuadrática: } F(h) = \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2}} \quad (3)$$

$$\text{(ML) Multilogarítmica: } F(h) = \log(h^2 + R^2) \quad (4)$$

$$\text{(MC) Multicuadrática: } F(h) = \sqrt{h^2 + R^2} \quad (5)$$

$$\text{(SCN) Spline Cúbico Natural: } F(h) = (h^2 + R^2)^{3/2} \quad (6)$$

$$\text{(TPS) Thin Plate Spline: } F(h) = (h^2 + R^2) \log(h^2 + R^2) \quad (7)$$

En particular se denominan:

- $F_{ij} = F(d_{ij})$
- $F_{ie} = F(d_{ie})$

Para estimar el valor de U en el punto P_e se utiliza la Ecuación 8 (Baxter 1992; Echeverri-Arias *et al.* 2009; Rojo-García 2013).

$$U_e = S(P_e) = \sum_{i=1}^m \lambda_i F_{ie} \quad (8)$$

Los valores de los ponderadores λ_i se obtienen de resolver el sistema de la Ecuación 9 (Echeverri-Arias *et al.* 2009; Rojo-García 2013):

$$\begin{cases} F_{11}\lambda_1 + F_{12}\lambda_2 + \dots + F_{1m}\lambda_m = U_1 \\ F_{21}\lambda_1 + F_{22}\lambda_2 + \dots + F_{2m}\lambda_m = U_2 \\ \dots \\ F_{m1}\lambda_1 + F_{m2}\lambda_2 + \dots + F_{mm}\lambda_m = U_m \end{cases} \quad (9)$$

Por su forma de calcular, pudiera percibirse cierta semejanza lejana (y solo aparente) de este método con el kriging de la Geoestadística (Calder & Cressie 2009) si se sustituyen los variogramas por las FBR. El método de FBR tiene variantes (Branch, Prieto & Boulanger 2007; Quesada & Marsik 2012) que no serán consideradas en la presente investigación.

A partir de los datos de la red R_1 se estima por el método de la FBR (por las variantes mencionadas) el valor de cada magnitud U de interés (L, Ni, Fe y Co) en los puntos P_i de la red R_3 y será estudiado, mediante estadígrafos descriptivos elementales, los comportamientos del error absoluto relativo de los valores estimados (expresadas porcentualmente, Ecuación 10) y denominados VMER (Miller, Freund & Johnson 2005):

$$VMER_i = 100 \frac{|U_i - S(P_i)|}{|U_i|} \quad (10)$$

Para el procesamiento informático se usó el software Surfer versión 11. Se tomó $R=73$ calculado como el cuadrado de la longitud de la diagonal de los datos en el plano dividido por el producto del número de datos por 25 (Golden Software 2012).

Los estadígrafos calculados para cada caso fueron:

- Valor mínimo (V_i)
- Valor máximo (V_m)
- Rango ($R=V_m-V_i$)
- Media aritmética (MA)
- Desviación estándar (DS)
- Coeficiente de variación ($CV=DS/MA$)

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Espesor de la corteza (L)

La Tabla 1 y Figura 1 muestran, respectivamente, los valores VMER para L y el modelo de la misma, según la FBR multicuadrática.

Tabla 1. Resultados estadísticos básicos de los valores VMER para L

Método	V_i	V_m	R	MA	DE	CV
IM	0	688,85	688,85	29,41	40,88	1,39
ML	0	709,11	709,11	28,26	38,32	1,36
MC	0	734,33	734,33	28,26	38,72	1,37
SCN	0	773,19	773,19	28,85	40,63	1,41
TPS	0	756,32	756,32	28,36	39,37	1,39

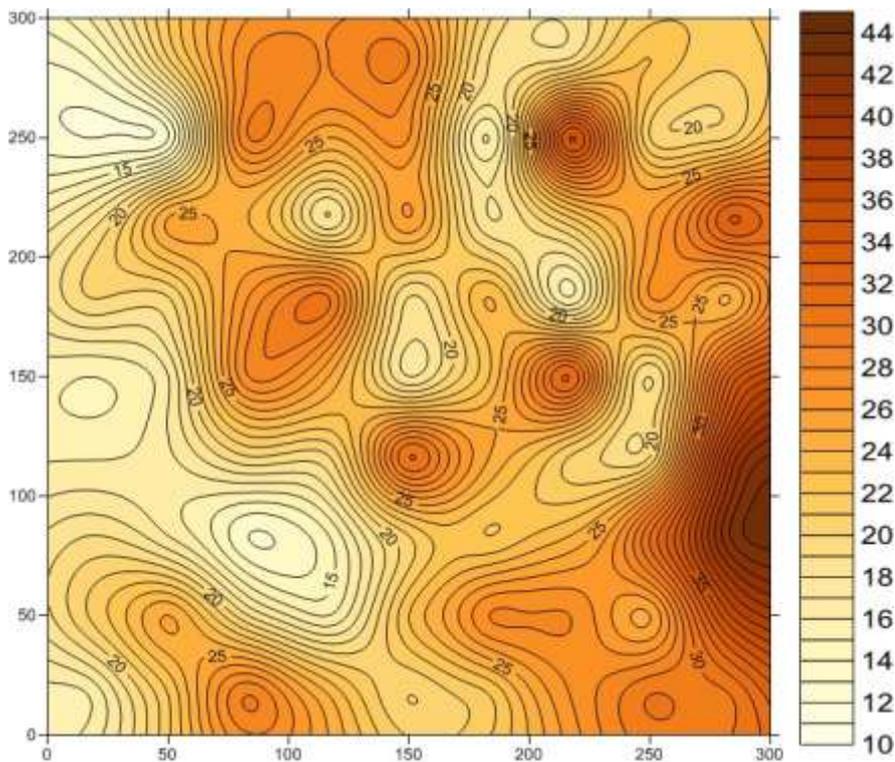


Figura 1. Modelo de L según la FBR multicuadrática.

La distribución de frecuencias de los valores VMER para L en el modelo obtenido para la FBR multicuadrática se muestra en la Figura 2, donde aproximadamente el 68 % de los valores VMER son menores del 30 %.

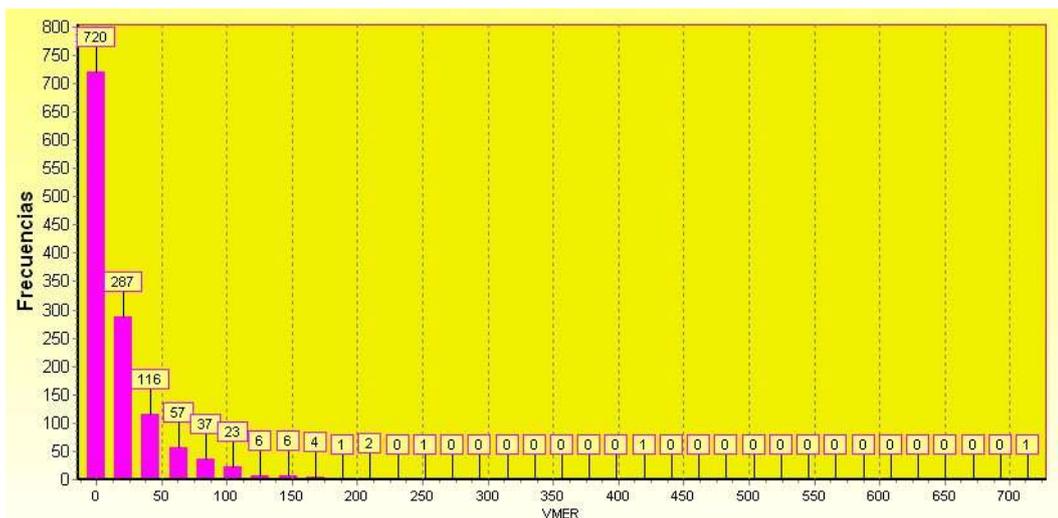


Figura 2. Histograma de VMER para L (FBR multicuadrática).

3.2. Níquel

Los resultados estadísticos de VMER y el modelo, según la FBR multicuadrática, para el Ni se reflejan en la Tabla 2 y Figura 3, respectivamente. Según la distribución de frecuencias de los valores VMER para Ni en el modelo obtenido para la FBR multicuadrática,

aproximadamente el 86 % de los valores VMER son menores del 30 % (Figura 4).

Tabla 2. Resultados estadísticos básicos de los valores VMER para Ni

Método	Vi	Vm	R	MA	DE	CV
IM	0	141,18	141,18	13,23	13,03	0,99
ML	0	136,25	136,26	13,61	13,15	0,97
MC	0	133,5	133,5	14,02	13,47	0,96
SCN	0	127,38	127,38	14,89	14,18	0,95
TPS	0	130,44	130,44	14,41	13,82	0,96

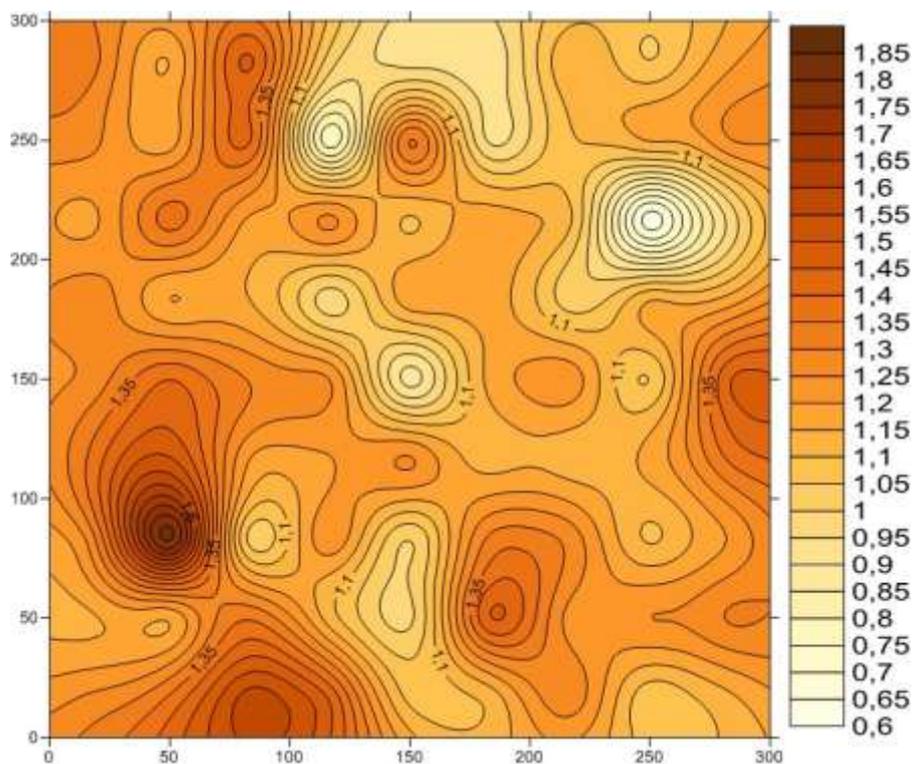


Figura 3. Modelo del Ni según la FBR multicuadrática.

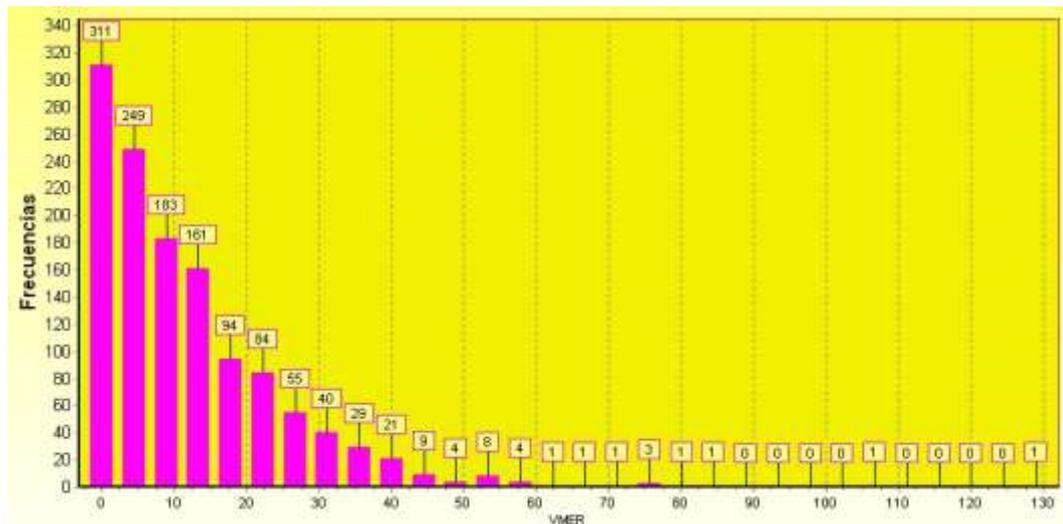


Figura 4. Histograma de VMER para Ni (FBR multicuadrática).

3.3. Hierro

La Tabla 3 y las Figuras 5 y 6 muestran los resultados para Fe. La distribución de frecuencias de los valores VMER para esta magnitud en el modelo obtenido para la FBR multicuadrática refleja que aproximadamente el 88,5 % de los valores VMER son menores del 30 %.

Tabla 3. Resultados estadísticos básicos de los valores VMER para Fe

Método	Vi	Vm	R	MA	DE	CV
IM	0	91,31	91,31	12,11	10,03	0,83
ML	0	94,38	94,38	12,8	11,46	0,90
MC	0	105,65	105,65	13,66	12,86	0,94
SCN	0	214,28	214,28	15,29	16,95	1,11
TPS	0	157,72	157,72	14,53	14,71	1,01

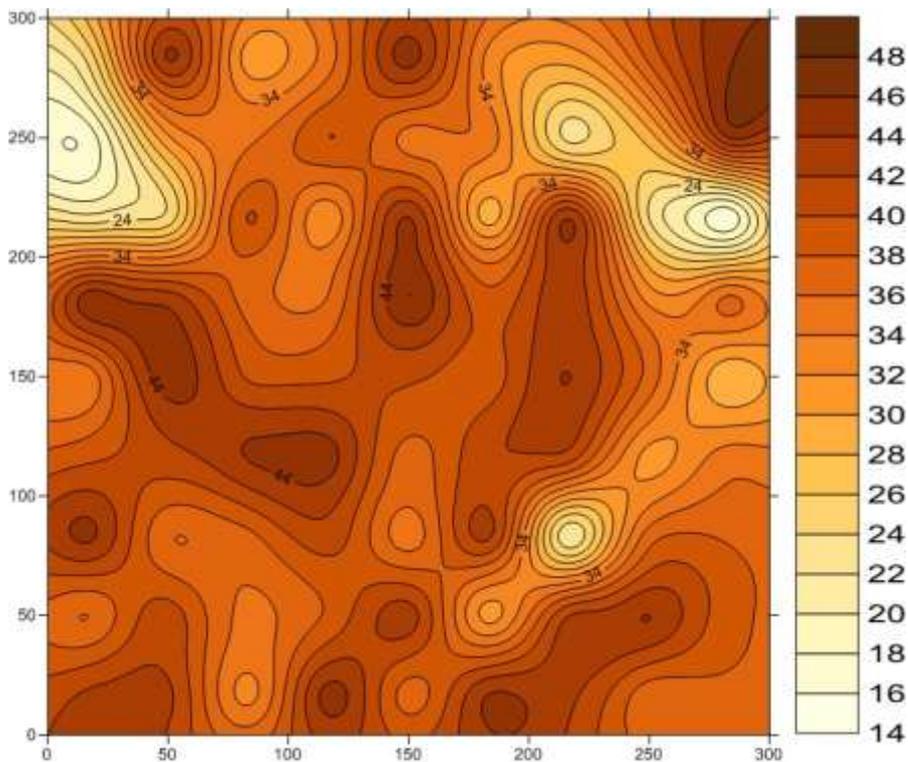


Figura 5. Modelo del Fe según la FBR multicuadrática.

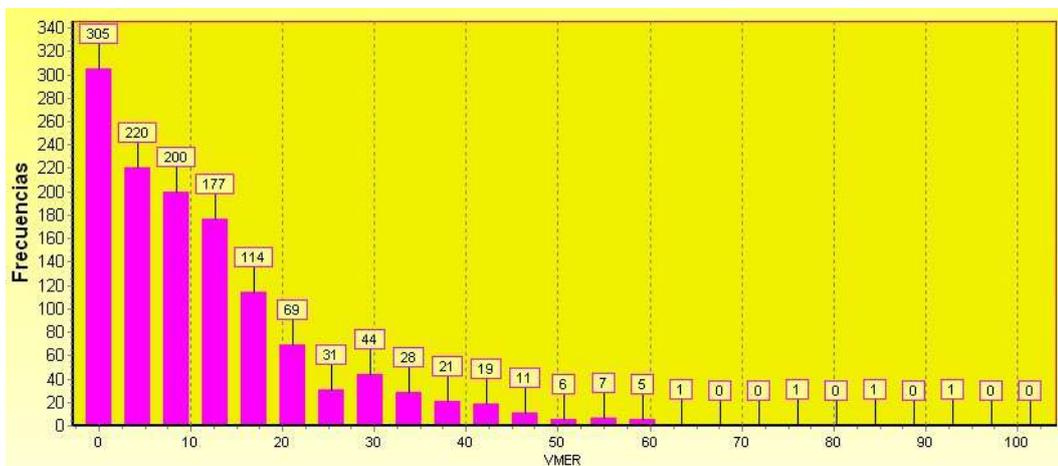


Figura 6. Histograma de VMER para Fe (FBR multicuadrática).

3.4. Cobalto

Los resultados para el Co se ilustran en la Tabla 4 y las Figuras 7 y 8. La distribución de frecuencias de los valores VMER para Co en el modelo obtenido para la FBR multicuadrática refleja que, aproximadamente, el 57 % de los valores VMER son menores del 30 %.

Tabla 4. Resultados estadísticos básicos de los valores VMER para Co

Método	Vi	Vm	R	MA	DE	CV
IM	0	995,73	995,73	27,88	43,99	1,58
ML	0	1 105,12	1105,12	30,24	48,85	1,62
MC	0	1 169,31	1 169,31	32,86	53,16	1,62
SCN	0	1 237,01	1 237,01	37,58	65,26	1,74
TPS	0	1 208,63	1 208,63	35,26	58,28	1,65

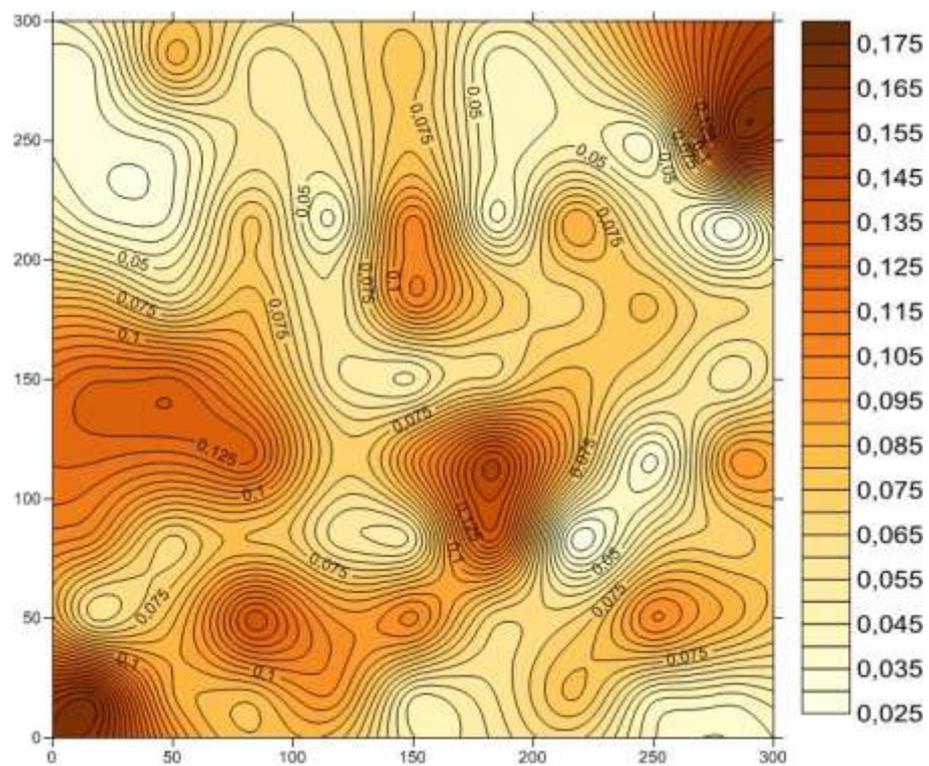


Figura 7. Modelo del Co según la FBR multicuadrática.

- c) Los valores de MA para Fe: 12,96; 11,83; 12,11; 12,8; 13,66; 15,29; 14,53 son aceptables y semejantes.
- d) Los valores de MA para Co: 27,24; 27,21; 27,88; 30,24; 32,86; 37,58; 35,26 son insatisfactorios y semejantes.

Se deduce entonces que los resultados no dependen esencialmente del método, o sea, que ningún método tiene ventajas evidentes sobre otro. En el caso del Fe y del Co las funciones de base radial MC, SCN y TPS tienen peores resultados. Esto, que no sucede cuando se analizan las variables L y Ni, merece un estudio especial.

4. CONCLUSIONES

1. Los resultados estadísticos básicos de los valores VMER para L (MA>28 %) y para Co (MA>27 %) muestran que ninguno de las FBR son capaces de estimar aceptablemente los valores de la red R_3 a partir de los datos de la red R_1 .
2. Los resultados estadísticos básicos de los valores VMER para Ni (MA<15 %) y Fe (MA<16 %) muestran que ninguno de las FBR son capaces de estimar aceptablemente los valores de la red R_3 a partir de los datos de la red R_1 .

5. REFERENCIAS

- BAXTER, B. 1992: *The Interpolation Theory of Radial Basis Functions*. Ph.D. Thesis. University of Cambridge. Consultado: 8 marzo 2015. Disponible en: <http://arxiv.org/pdf/1006.2443v1>
- BRANCH, J. W.; PRIETO, F. & BOULANGER, P. 2007: Método de llenado de huecos en mallas triangulares empleando funciones de base radial. *Revista Dyna* 74(152): 97-111.
- BRONSHTAIN, I. N.; SEMENDYAYEV, K. A.; MUSIOL, G. & MÜHLIG, H. 2007: *Handbook of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1 163 p.
- CALDER, C. & CRESSIE, N. A. 2009: Kriging and variogram models. In: R. Kitchin & N. Thrift (Eds.) *International Encyclopedia of Human Geography* 1: 49-55. Oxford Elsevier. Consultado: 14 dic 2014. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1016/B978-008044910-4.00461-2>
- ECHEVERRI-ARIAS, J. A.; LOSADA, B. M.; MORENO, F. J. & BRACO, A. 2009: Mejoramiento de imágenes usando funciones de base radial. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín* 8(15): 21-28.
- GOLDEN SOFTWARE, INC, 2012: Surfer. Surface Mapping System. Versión 11.0.642. Golden, Colorado, USA.
- ILYAS, U.; RAWAT, R. S.; TAN, T. L.; LEE, P.; CHEN, R.; SUN, H. D.; ... & ZHANG, S. 2012: Enhanced indirect ferromagnetic pd exchange

- coupling of Mn in oxygen rich ZnO: Mn nanoparticles synthesized by wet chemical method. *Journal of Applied Physics* 111(3): 033503.
- LEGRÁ-LOBAINA, A. A. 1999: *Metodología para el Pronóstico, Planificación y Control Integral de la Minería en Yacimientos Lateríticos*. Tesis doctoral. Instituto Superior Minero Metalúrgico. 187 p. Consultado: 9 oct 2014. Disponible en: <http://repositorio.ismm.edu.cu/id/eprint/12>.
- LEGRÁ-LOBAINA, A. A.; GUILARTE-NOA, A. M. & GUEVARA-PÉREZ, T. 2015: Evaluación de modelos de variables geo-tecnológicas en un bloque de un yacimiento laterítico cubano: Primera parte: Kriging e Inverso de la Distancia. *Minería y Geología* 31(1): 29-51.
- MARTÍNEZ, A. & PÉREZ, N. 2006: ¿Cuál es el mejor método para estimar variables en yacimientos lateríticos de níquel y cobalto? *Minería y Geología* 22(3): 1-21.
- MILLER, I.; FREUND, J. & JOHNSON, R. 2005: *Probabilidades y Estadísticas para ingenieros*. Volumen I y II de la Cuarta Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 624 p.
- ROJO-GARCÍA, J. R. 2013: *Análisis de interpolación con funciones de base radial en el cráter del Chicxulub*. Tesis de grado. Universidad Nacional Autónoma de México. Consultado: 15 ene 2015. Disponible en: <http://132.248.182.189/mmc/tesis/JoseRodrigoRojo/JoseRodrigoRojo-I.pdf>
- QUADOR, J. Q. 2005: Estudios de estimación y simulación geoestadística para la caracterización de parámetros geólogo-industriales en el yacimiento laterítico Punta Gorda. *Minería y Geología* 21(4): 1-48.
- QUESADA, M. E. & MARSIK, M. 2012: Uso de modelos de elevación digital como alternativa para mostrar errores en mapas topográficos. *Revista Geográfica de América Central* 1(48): 77-93. Consultado: 22 dic 2014. Disponible en: <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/geografica/article/download/3999/3841>.
- SÁNCHEZ-TORRES, G. & BRANCH, J. W. 2009: Un procedimiento geométrico para la reconstrucción de superficies mediante funciones de base radial de soporte compacto. *Revista Facultad Ingeniería de la Universidad de Antioquia* (48): 119-129.

Aristides A. Legrá-Lobaina. alegra@ismm.edu.cu

Doctor en Ciencias Técnicas. Profesor Auxiliar. Departamento de Matemáticas.
Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, Holguín, Cuba.

Ricardo Quevedo-Mejías. rquevedo@ismm.edu.cu

Ingeniero en Ciencias Informáticas. Instructor. Departamento de Matemáticas.
Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa. Holguín, Cuba.

Marledis Pupo-Mulgado. mmulgado@ismm.edu.cu

Ingeniera en Ciencias Informáticas. Instructora. Departamento de Informática.
Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa. Holguín, Cuba.