

## ANÁLISIS DEL SOCAVADO EN ENGRANAJES CILÍNDRICOS DE PERFIL EVOLVENTE APLICADOS EN MECANISMOS DE MINERÍA

### Analysis of undercut spur gears in applied mining mechanisms

Daniel Roberto HERNÁNDEZ-OCHOA<sup>1</sup>, Manuel VEGA-ALMAGUER<sup>2</sup>

(1) Centro de Estudios CAD/CAM, Facultad de Ingeniería, Universidad de Holguín

E-mail: [daniel@cadcam.uho.edu.cu](mailto:daniel@cadcam.uho.edu.cu) (2) Dpto. de Mecánica, Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa

**RESUMEN-** La interferencia de tallado, también conocida como penetración del perfil, es un fenómeno que puede presentarse en la generación de engranajes de perfil de evolvente con números de dientes reducidos. El resultado es un diente debilitado en su base, y por tanto con menor capacidad de transmisión desde el punto de vista de la resistencia a la flexión. No obstante, el hecho de que el diente vea disminuida su capacidad de transmisión no significa que quede inutilizado para transmitir potencia en reductores de mecanismos de minería, en especial si se tiene en cuenta que, en la inmensa mayoría de los casos, el riesgo de fallo por picadura es mucho más restrictivo que el de fallo por rotura en la base; siendo así que la penetración del perfil no tiene influencia significativa en el comportamiento a presión superficial, que origina la picadura. El presente trabajo presenta la caracterización de este fenómeno y las ecuaciones analíticas que permiten calcular el punto de intersección de las curvas que definen el perfil del diente debilitado.

**Palabras clave:** Engranajes, interferencia, socavado, análisis

**ABSTRACT-** The interference of carving, also well-known as penetration of the undecut profile, is a phenomenon that can appear in the generation of spur gears with reduced numbers of teeth. The result is a debilitated tooth in its base, and therefore with smaller capacity of transmission from the point of view of the resistance to the flexion. However, the fact that the tooth sees diminished its capacity of transmission does not mean that it is made unusable in gearbox to

transmit reducer power of mining mechanisms, in special if considers that, in the immense majority of the cases, the risk of failure by pitting is more restrictive that the one of failure by breakage in the base; being so the penetration of the profile does not have significant influence in the behavior to superficial pressure, that originates the pitting. The present work show the analytical characterization of this phenomenon and equations that allow to calculate the intersection point of the curves that define the profile of the debilitated tooth

**Key words:** Spur gears, interference, undercut, analysis.

## INTRODUCCIÓN

El debilitamiento del diente en las ruedas dentadas ha provocado una notable falta de interés por el estudio de la penetración, llevando a considerar como deficiente la casi totalidad de los diseños en que ésta aparece. Así, la normas internacionales de diseño de engranajes ISO y AGMA proponen modelos de cálculo resistente del diente que, en principio, consideran válidos para el caso de penetración; sin embargo, a la hora de reflejar los resultados en tablas o gráficas, ignoran sistemáticamente estos casos, recomendando evitar su aparición mediante el aumento del número de dientes o del desplazamiento de tallado. Resultado de lo anterior es que la interferencia de tallado es un fenómeno muy poco estudiado, y con presencia casi nula en la práctica industrial.

No obstante, el hecho de que el diente vea disminuida su capacidad de transmisión no significa que quede inutilizado para transmitir potencia. Por otro lado, las soluciones de aumentar el desplazamiento o el número de dientes no son factibles en determinadas circunstancias en que se tengan limitaciones de tamaño o de holgura radial para la evacuación del lubricante. Este caso se presenta en etapas con restricciones en el valor del módulo, producidas por las potencias a transmitir, o en etapas con elevada relación de transmisión.

Es necesario para poder realizar el análisis de la interferencia de tallado determinar los parámetros que definen el punto de intersección entre las curvas evolvente y trocoide del perfil del diente, y estudiar su comportamiento ante la variación de parámetros de diseño que definen varios casos de interferencia de tallado. Teniendo gran importancia la obtención de ecuaciones analíticas sencillas que puedan asistir al diseñador en la determinación del grado de interferencia presentado por un engranaje sin necesidad de emplear métodos numéricos o complejos algoritmos computacionales.

### Geometría del engrane cilíndrico de perfil evolvente socavado

El socavado de un diente de una rueda dentada se puede producir por diversos factores. Para conocer si existe la presencia del socavado se han establecido condiciones de no penetración de la herramienta (figura 1), las cuales están dadas por:

$$Z \geq \frac{2[b - rf(1 - \text{sen} \phi_n) - x] \cos \psi}{\text{sen}^2 \phi_f} \quad (1)$$

y también por:

$$x \geq b - rf(1 - \text{sen} \phi_n) - \frac{Z \text{sen}^2 \phi_f}{2 \cos \psi} \quad (2)$$

Siendo (Z) en la ecuación 1, el número mínimo de dientes que asegura la no penetración para un desplazamiento (x) determinado de la herramienta, y (x) en la ecuación 2, el desplazamiento mínimo de la herramienta para evitar el socavado con un número de dientes determinado (Z). De la misma forma las normas determinan el número mínimo de dientes según valor del ángulo de presión (tabla 1)

En la práctica es admisible una cierta penetración, siempre que no rebase valores que debiliten en exceso el diente; sin embargo, estos casos no están normalizados, lo cual hace más complicada su aplicación.

Con el objetivo de realizar un estudio más detallado del fenómeno del socavado y de los factores que influyen en su desarrollo, se procede a modelar desde el punto de vista matemático el desarrollo de los perfiles que componen el engrane de dientes rectos de perfil de evolvente.

En el caso de los engranes cilíndricos de perfil evolvente socavados en la base del diente, dos perfiles caracterizarán la geometría: el perfil de evolvente y el perfil de trocoide, los cuales pertenecen a la clasificación de curvas cicloides (figura 2).

### Análisis de las ecuaciones que definen el perfil de un engranaje con interferencia de tallado

La evolvente de circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos que verifican que la tangente por ellos a una circunferencia, llamada circunferencia de base, que define un

punto de tangencia que dista del punto considerado una distancia igual a la longitud del arco de la circunferencia de base limitado por el punto de tangencia y uno dado de la circunferencia. Las ecuaciones que definen este perfil Ec. (3) (4) que grafican el conjunto de puntos que componen el perfil evolvente (figura 3).

$$\rho = \sqrt{rb^2 + rb^2\theta^2} = rb\sqrt{1 + \theta^2} \quad (3)$$

$$\beta = \theta - \operatorname{arctg} \frac{rb\theta}{rb} = \theta - \operatorname{arctg} \theta \quad (4)$$

donde:

rb: Radio de la circunferencia de base.

$\theta$ : Ángulo que abarca el arco de circunferencia del origen de la evolvente al radio exterior.

Lo que constituye las ecuaciones paramétricas de la evolvente en coordenadas polares, referidas a unos ejes cuyo origen de radios esta en el centro de la circunferencia de base, y su origen de ángulos en la recta que pasa por el origen de los radios y el origen de la evolvente.

El perfil trocoide en la base del diente solamente se presentara en caso de que se produzca penetración, es decir, si se cumple la Ec. (5)

$$r_o \leq r_p \cos^2 \phi_n \quad (5)$$

donde:

$r_o$ : Radio del centro de la rueda al punto de la herramienta que se une con el radio de acuerdo de cabeza

$r_p$ : Radio de la circunferencia primitiva

$\phi_n$ : Ángulo de presión de generación.

Las ecuaciones de la trocoide en coordenadas polares que definen este perfil Ec. (6)(7) grafican el conjunto de puntos que componen el perfil trocoide (figura 4).

$$\rho = \sqrt{\left(r_0 - r_f \cdot (\text{sen}(\varphi) - \text{sen}(\phi_h))\right)^2 + \left(\frac{\cos(\psi)}{\tan g(\varphi)} \cdot (r_p - r_0 + r_f \cdot (\text{sen}(\varphi) - \text{sen}(\phi_h)))\right)^2} \quad (6)$$

$$\beta = \arctan g \left( \frac{\cos(\psi)}{\tan g(\varphi)} \cdot \frac{r_p - r_0 + r_f \cdot (\text{sen}(\varphi) - \text{sen}(\phi_h))}{r_0 - r_f \cdot (\text{sen}(\varphi) - \text{sen}(\phi_h))} \right) - \phi_f - (r_p - r_0 + r_f \cdot (\text{sen}(\varphi) - \text{sen}(\phi_h))) \cdot \frac{\cos(\psi)}{\tan g(\varphi)} - r_f \cdot \frac{(\cos(\phi_h) - \cos(\varphi))}{\cos(\psi)} + r_0 \cdot \frac{\tan g(\phi_f)}{r_p} \quad (7)$$

donde:

- rf : Radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta.
- j : Ángulo que abarca los puntos del perfil trocoide desde fn a p/2.
- fh : Ángulo de presión de funcionamiento.
- y : Ángulo de hélice.

Como se aprecia, las ecuaciones anteriores al graficarse describen completamente el perfil lateral de un engrane de dientes rectos de perfil de evolvente con interferencia de tallado (figura 5).

Las curvas que componen el perfil del diente se interceptan en un punto definido por los parámetros (q, j) determinados por métodos numéricos y este punto se desplazara restando segmentos de la curva evolvente, a medida que la herramienta aumenta su penetración hacia el centro del engranaje, es por ello que el calculo de dicho punto reviste gran importancia para poder estudiar la influencia de los parámetros del engranaje en el desplazamiento del punto de intersección. Analizaremos los casos de interferencia de tallado obtenidos de las combinaciones de los parámetros geométricos de las herramientas normalizadas ISO, AGMA encontrándose 1 152 casos de interferencia de tallado, para los siguientes rangos de valores:

- y : Ángulo de hélice ( $0^0$ ;  $10^0$ ;  $20^0$ ;  $30^0$ )

- fh: Ángulo de presión de funcionamiento ( $10^0$ ;  $15^0$ ;  $20^0$ ;  $25^0$ )  
 b: Dedendo (1; 1.25)  
 rf: Radio de acuerdo de la cabeza de la herramienta (0.25; 0.30)  
 x: Coeficiente de Desplazamiento (-0.2; -0.15; -0.10; -0.05; 0; 0.05)  
 Z: Numero de Dientes (3 valores que cumplan con la condición de penetración para cada grupo de valores anteriormente citados)

### **Análisis del parámetro geométrico (h) y su relación con la interferencia de tallado**

Podemos apreciar que el grado de socavado de la base del diente de una rueda dentada, es posible caracterizarlo a través del ángulo  $h$  formado entre el ángulo de presión  $fh$  y el punto que se genera al ser cortada la circunferencia de radio base de la rueda por una recta que pasa por el origen del radio de cabeza de la herramienta (figura 6).

Este ángulo aumenta en la medida que la cabeza de la herramienta se desplaza hacia el centro de la rueda, relacionándose de forma directa con el aumento de la penetración en la base del diente y siendo posible determinar su magnitud a través de la Ec. (8).

$$\eta = ar \cos\left(\frac{ro}{rb}\right) - \phi h \quad (8)$$

## **RESULTADOS**

Si realizamos un estudio en el cual se grafiquen los valores del parámetro  $\eta$  que define el punto de intersección del perfil evolvente con el perfil trocoide determinado por métodos numéricos y el valor correspondiente al ángulo  $h$  podremos encontrar la siguiente relación (figura 7).

Aplicando el método de regresión lineal con un grado de aproximación del 99.97 %, podemos plantear que es posible, a partir del calculo del ángulo  $h$  conocer el valor del parámetro  $\eta$  que define el punto de intersección del perfil evolvente con el perfil trocoide, brindando al diseñador la Ec. (9) con la posibilidad de sustituir este parámetro en las ecuaciones (3)(4) y aplicar un método más simple de determinación del grado de interferencia de un engranaje.

$$\theta = 0.533989 \cdot \eta \quad (9)$$

### CONCLUSIONES

1. Con la determinación por métodos numéricos de los parámetros ( $\phi$ ,  $j$ ) que definen el punto en el cual el perfil evolvente es cortado por el perfil trocoide, se puede apreciar el comportamiento de la interferencia de tallado.
2. Con la relación entre el ángulo  $h$  y el parámetro  $\phi$  que define el punto de intersección del perfil evolvente con el perfil trocoide, se puede encontrar un método más simple de determinar el comportamiento de la interferencia de tallado.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anderson, N.E. y Loewenthal, S.H., 1983. "Selecting spur gear geometry for greater efficiency", Machine Design, pg 101-105.
- Andrews, C.G. y Argent, J.D., 1992. "Computer Aided optimal gear design", Proc. Of the 1992 International power transmission and gearing conference, scottsdale, AZ., pag. 391-396
- Artés, M. y Pedrero, J.I., 1994. "Computerized Graphic Method for the Analysis of Gear Design", Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 1, pg. 59-71
- Comments on Tooth undercut Limitation Calculation, Document 844 ISO/TC 60/SC 2/WG 6, 2000
- García Masiá, C., Pedrero, J.I., 2003. "New approach for the dimensional synthesis of gear basic surfaces", Mechanism and Machine Theory, 38, 3, 213-225, Marzo 2003
- Litvin, F. , 1994. "Gear Geometry and Applied Theory", Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ
- Pedrero, J.I., Artés, M., García-Masiá, C., 2003. "Influence of undercut on the load capacity of involute teeth with small pressure angle", IX ASME International Power Transmission and Gearing Conference-AGMA 2003 Fall Technical Meeting, ASME/AGMA, Chicago-Illinois, Septiembre 2003
- Pedrero, J.I., Artés, M., García-Masiá, C., 2003 "Influence of undercut on the surface durability of involute gear teeth", International Conference Power Transmissions '03, Varna-Bulgaria, Septiembre 2003

- Pedrero, J.I., Pleguezuelos M., 2005. "Modelo de cálculo del rendimiento de transmisiones por engranajes helicoidales". 7º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, México D.F., Octubre, 2005
- Quiñones Cherta A., Goytisoló Espinosa R., Moya Rodríguez J., Velásquez Pérez J.A., Ocampo Mendizábal R., 2005. "Influencia de la corrección del dentado y del coeficiente de fricción en el factor de forma de los dientes de los engranajes cilíndricos de dientes rectos". 7º Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, México D.F., Octubre, 2005
- Tucker, A.L., 1980. "The gear design process", ASME Paper 80-C2/DET-13

## FIGURAS Y TABLAS

**TABLA 1.** Número mínimo de dientes según valor del ángulo de presión

Ángulo de Presión	Número Mínimo de Dientes
14.5°	32
20°	17
25°	12

Fuente: Norton, Robert. "Design of Machinery" (second edition), 2001



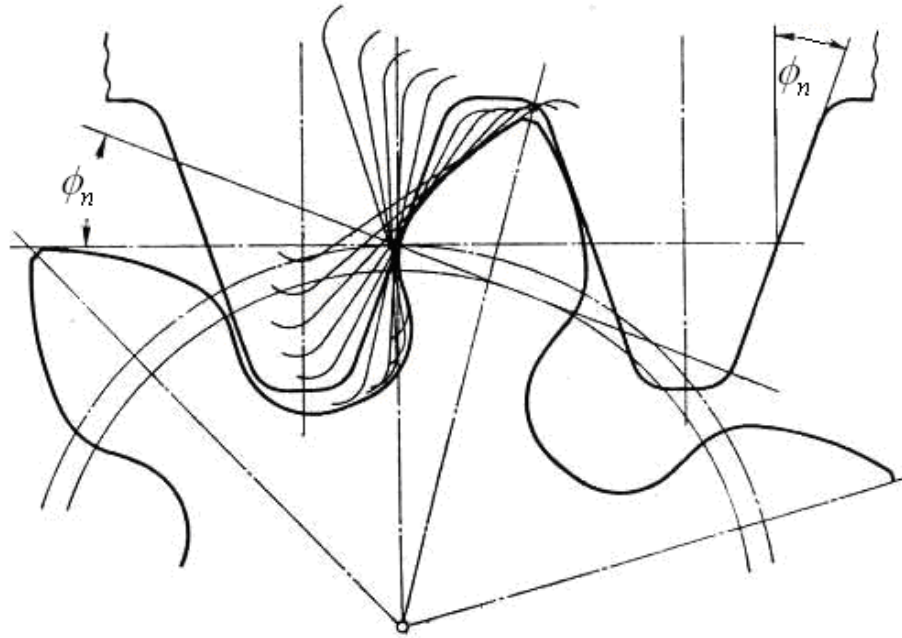


FIGURA 1. Interferencia de tallado.

<b>Epicycloide</b>	Acortada		<b>Hipocicloide</b>	Acortada	
	Normal			Normal	
	Alargada			Alargada	
<b>Cicloide</b>	Acortada		<b>Pericicloide</b>	Acortada	
	Normal			Normal	
	Alargada			Alargada	
<b>Evolute</b>	Acortada				
	Normal				
	Alargada				

FIGURA 2. Clasificación de las curvas cicloides (Stryczek 1990).

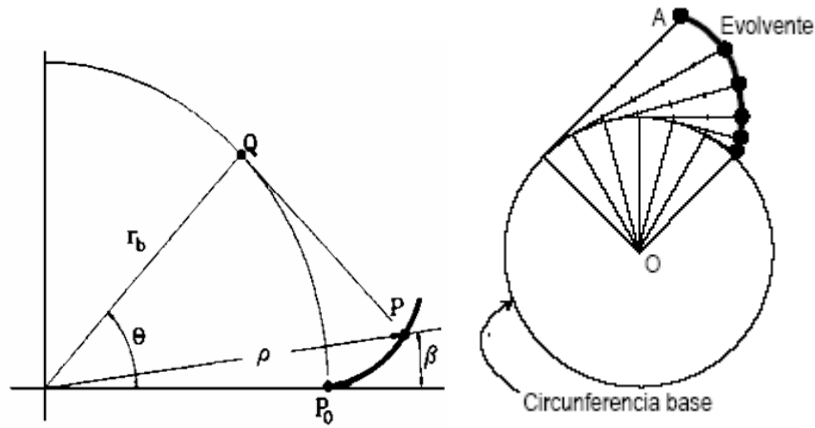


FIGURA 3. Curva correspondiente al perfil evolvente.

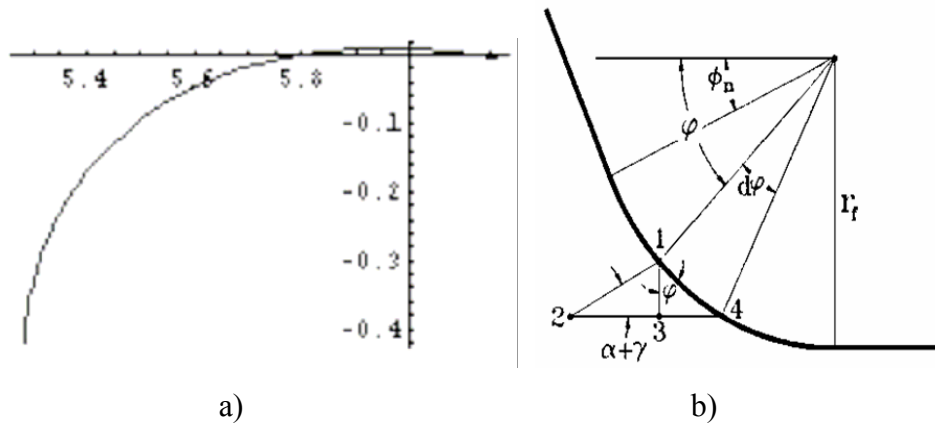


FIGURA 4. a) Curva correspondiente al perfil trocoide b) Radio de cabeza de la herramienta que genera la trocoide.

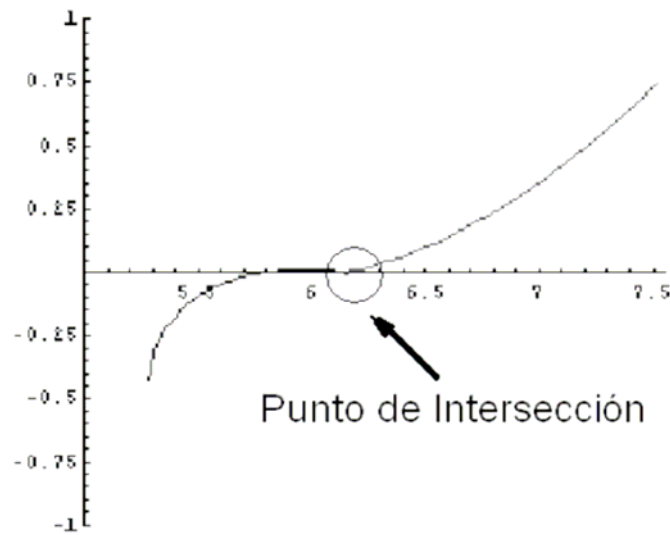


FIGURA 5. Perfil del flanco del diente compuesto por la curva de evolvente y la curva trocoide.

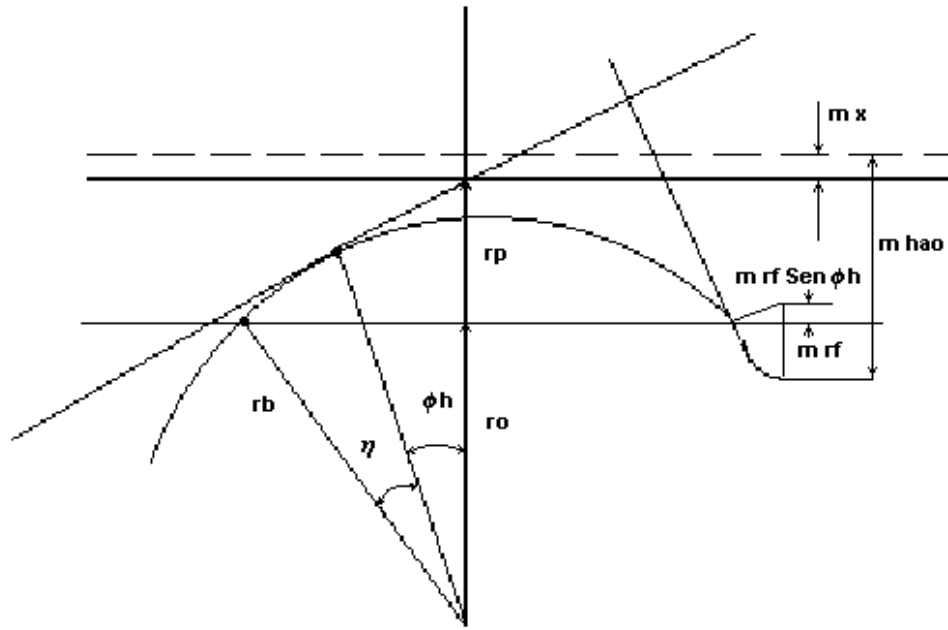


FIGURA 6. Deducción del ángulo  $h$

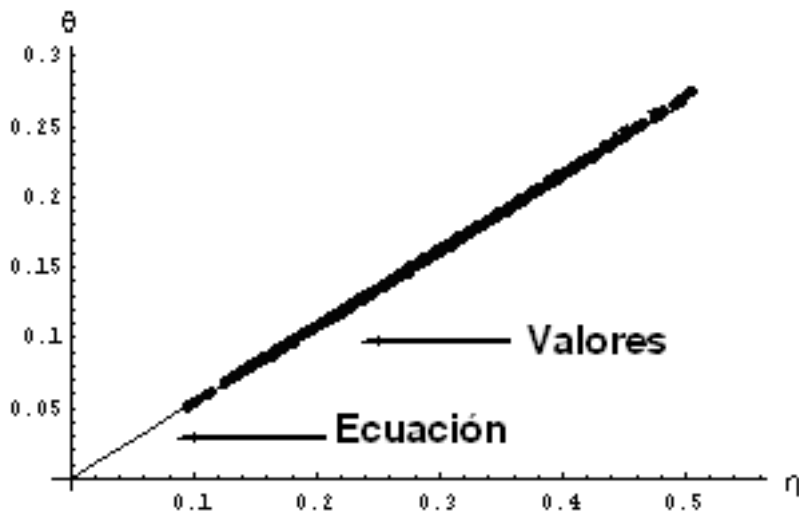


FIGURA 7. Comparación gráfica entre la ecuación aproximada y los valores del ángulo ( $\theta$ ) obtenidos con el Software Mathematica<sup>®</sup> 3.0 por métodos numéricos.