Modelación de una superficie topográfica a partir de la relación entre el Kriging y la interpolación lineal en R^N

Arístides A. Legrá Lobaina[1]
Oris R. Silva Diéguez[2]
Orlando Belete Fuentes[3]

[1,2] Licenciados en Matemáticas, Profesores del Departamento de Matemáticas y Computación. ISMM
[3] Ingeniero, Profesor del Departamento de Minas. ISMM

RESUMEN: Este trabajo se presenta en cuatro secciones. En la primera, se explica la importancia de la determinación del modelo de una superficie topográfica; en la segunda se mencionan los aspectos de la estimación por Kriging y se destacan las fórmulas de estimación y de cálculo del error; en la tercera se plantean los elementos básicos de la interpolación lineal en R^n, y en la última sección se demuestra que la interpolación lineal, vista en el caso más general de R^n es, bajo ciertas condiciones, un caso particular de un método de Kriging, por lo cual afirmamos que esta forma de interpolación presenta ventajas relacionadas con la estimación de la varianza de estimación, cuestión importante cuando solamente disponemos de una tabla de datos como información del fenómeno. Finalmente se muestran las relaciones antes vistas en el caso de R^2 y R^3.

ABSTRACT: This work is introduced in four sections. In the first the importance of the determination of the model of a topographical surface is explained, in the secondary the looks of the estimate by Kriging are mentioned, standing out the formulas of estimate and of calculation of the error; in the third the basic elements of the lineal interpolation in R^n are expounded and the fourth section are demonstrated that the lineal interpolation, view in the most general case of R^n, is, under certain conditions, a particular case of a method of Kriging, for which we affirmed that this interpolator introduces advantages related with the estimate of the variance of estimate, important when only question provides of a board of data like information of the phenomenon. Finally the relationships are shown views in the case of R^2 and R^3.

Palabras claves: modelación, Kriging, interpolación lineal.

INTRODUCCIÓN

Una de las tareas más comunes en la minería es la de realizar mediciones topográficas en un terreno y, a partir de estas modelar la superficie correspondiente con el objetivo de determinar propiedades de algún fenómeno. Entre los métodos que se emplean en la actualidad está el Kriging que es considerado en muchas ocasiones, debido a sus orígenes, como un método de estimación específico de la Geoestadística y no se enfatiza en sus relaciones prácticas con otros métodos de estimación. Entre estos últimos vale destacar, por su amplio uso, el método de interpolación lineal del cual los casos más conocidos son la interpolación por una recta en R^2 y la interpolación por un plano en R^3.

En el caso de la interpolación lineal, al igual que en otros, el error no es fácilmente estimable ya que por lo general las fórmulas vienen dadas por expresiones que incluyen derivadas de la función que describe el fenómeno, evaluadas en cierto punto desconocido; si la función viene dada en forma de una tabla de datos, encontrar el error es prácticamente imposible. Por todo lo expuesto, reviste singular importancia disponer de fórmulas que permitan estimar el error de interpolación lineal.

En este trabajo se demuestra que la interpolación lineal, vista en el caso más general de R^n, es bajo ciertas condiciones, un caso particular de un método de Kriging, lo que nos permite afirmar que esta forma de interpolación presenta ventajas relacionadas con la posibilidad de obtener la estimación del error de interpolación, que es difícil cuando solo disponemos de una tabla de datos como información del fenómeno.

SOBRE LA MODELACIÓN TOPOGRÁFICA DE LOS YACIMIENTOS DE MINERALES ÚTILES

La *información* sobre la composición del suelo es uno de los elementos fundamentales en la solución de las tareas topográficas mineras. En realidad, cualquier investigación topográfica minera comienza con la valoración general de la estructura del objeto estudiado (muestra, sector, macizo de rocas mineras, etc.), determinación de sus dimensiones, límites, forma, distribución en el espacio, etc. Sobre la base de esta información de carácter estructural se realiza la separación del objeto del medio circundante y luego se especifica la metodología y medios para su estudio, lo cual es de extrema importancia para la explotación minera racional del yacimiento.

Por ejemplo, durante la explotación de los yacimientos lateríticos a cielo abierto las pérdidas cuantitativas y cualitativas están condicionadas, principalmente, por la variabilidad, heterogeneidad e indeterminación de los parámetros de los minerales útiles. Por eso, para la determinación de la calidad de la superficie topográfica o del estrato fue necesario crear un modelo de índices de minerales útiles y sobre sus bases fundamentar las soluciones técnicas más efectivas.

La forma práctica más usada para representar la información es un dibujo aproximado de la superficie modelada; este gráfico bidimensional al que llamaremos *modelo geométrico* debe contener tanto la información local de cada zona como la información de todo el cuerpo y, generalmente, se crea a partir de un *modelo analítico-numérico* que debe contener toda la información geólogo-topográfica disponible y debe ser capaz de pronosticar valores de la superficie en puntos no medidos. Los modelos geométricos más usados son las isolíneas, curvas de nivel, gráficos tridimensionales y la modelación volumétrica a escala. Las isolíneas, cortes (secciones) y perfiles se han considerado como los modelos fundamentales para la geometrización plana o bidimensional topográfica.

Para desarrollar cualquiera de estos modelos geométricos de una superficie topográfica, no basta con desarrollar un dibujo uniendo de alguna manera los datos disponibles, sino que a partir de los datos y de otros valores estimados se construyen superficies más complejas que reflejan de manera más completa la superficie topográfica. Estos valores estimados se obtienen mediante diferentes métodos (algunos de ellos contemplan laboriosos cálculos y otras dificultades), entre los que se destacan las medias aritmética y ponderada, inverso de potencias de la distancia, interpolación lineal, Kriging, etc.

En algunos de estos métodos es posible determinar el error de estimación y en otros no, sin embargo, este es el parámetro que expresa la eficiencia del modelo analítico-numérico y del modelo gráfico por lo que en el presente trabajo, a partir de la relación entre los métodos Kriging e interpolación lineal, obtendremos la fórmula del error del segundo. Así se dispone de un método sencillo de aplicar y con posibilidades de calcular el error de estimación.

BREVE DESCRIPCIÓN DEL ESTIMADOR LINEAL KRIGING

El Kriging es un método de estimación lineal insesgado, óptimo en el sentido que minimiza la varianza de estimación. A partir de los n valores conocidos (P_i,Y_i), $i = 1,2,\dots n$ y además $P_i = (x_{i1}, x_{i2},\dots,x_{im})$ pertenece a R^m, se obtiene un valor estimado $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ en el punto P; los ponderadores a_i se obtienen a partir de cierta relación entre los P_i (generalmente en función de las distancias euclidianas entre los mismos) y se pide que este valor estimado sea el que tenga varianza de estimación mínima. El Kriging es un interpolador exacto y es uno de los métodos del tipo *moving average*.

De los casos estudiados, distinguiremos cuatro, entre ellos:

1. La Esperanza Matemática de la variable Y es nula o conocida a priori y además la covarianza de Y es una función $c(h)$ donde h es la distancia euclidiana entre dos puntos. En este caso los a_i se calculan resolviendo el sistema $\sum_{i=1}^{n} a_i c_{ij} = c_j$. $j = 1,\dots n$; c es la covarianza entre los puntos P_i y P_j y c_j es la covarianza entre los puntos P y P_j.
   El Error de Estimación o Error de Kriging es $\sigma^2 = c_{gen} - \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ donde c_{gen} es la varianza de los n valores Y_i .
2. La Esperanza Matemática de Y es constante pero desconocida $E(Y(P)) = m$, la covarianza es $c(h)$. Los a_i se obtienen al resolver $\sum_{i=1}^{n} a_i c_{ij} = c_j + \mu$, donde $j = 1,\dots,n$, simultáneamente con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

En este caso el Error de Kriging es $\sigma^2 = c_{gen} - \sum_{i=1}^{n} a_i c_i + \mu$.

3. Sea Y una variable Estrictamente Intrínseca, sin desviación, dotada de un variograma γ pero no de covarianza, entonces los a_i se calculan por $\sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_{ij} + \mu = \gamma_i$ con $j = 1,\dots,n$, simultáneamente con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. El Error de Kriging es $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \gamma_i + \mu$..
4. Caso de una variable no estacionaria donde conocemos que se pueden utilizar los siguientes métodos:
   a) Kriging Universal.
   b) Funciones Aleatorias Intrínsecas de Orden k.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA INTERPOLACIÓN LINEAL

Sean n puntos (P_i, Y_i) de R^n donde se cumple para los n puntos P_i de R^{n-1} .

$$\begin{vmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1(n-1)} & 1 \\ X_{21} & \cdots & X_{2(n-1)} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{n(n-1)} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces para cualquier punto P pertenecientes al interior o a la frontera del hipertetraedro de R^{n-1} cuyos vértices son los n puntos P_i se puede obtener el valor interpolado Y en el punto $P = (x_1,\dots x_{n-1})$ resolviendo el sistema siguiente para obtener los únicos valores de $a_1,\dots,a_{n-1},b$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{ij} + b = y_j;\ j = 1,\dots,n, \text{ donde entonces } Y = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X + b$$

$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{ij} + b = y_i;\ j = 1,\ldots,n$, donde entonces $Y = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X + b$

En este trabajo demostramos que bajo ciertas condiciones, existe una relación entre la Interpolación Lineal y el caso 3 de Kriging y con ello se obtiene también una estimación del error de interpolación lineal.

RELACIÓN GENERAL ENTRE EL KRIGING Y LA INTERPOLACIÓN LINEAL

Consideremos el caso 3 de Kriging para $m = n-1$, se tienen n puntos de R^{n-1}, y tomemos el valor $\gamma(h) = h$ pero asumiendo que h es la distancia definida por:

$$h(P_i,P_j) = \sum_{k=1}^{n-1} \left| x_{ik} - x_{jk} \right|, \text{ de esta manera:}$$

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \left| x_{ik} - x_{jk} \right| \text{ y } \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_k - X_{jk} \right|$$

Entonces al escribir el sistema correspondiente al Kriging para un punto $P = (X_1,\ldots, X_{n-1})$ cualquiera, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left| X_{ik} - X_{jk} \right| \right) a_i + \mu = \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_k - X_{jk} \right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \text{ para } j = 1,\ldots,n.$$

Nótese que el sistema es cuadrado y si tiene solución, por el método de Kramer se obtienen las n soluciones $a_i = \frac{D_i}{D}$.

D_i es un determinante donde la columna de los términos independientes formada por $c\sum_{k=1}^{n-1}\left|X_k - X_{1k}\right|,\ldots,\sum_{k=1}^{n-1}\left|X_k - X_{nk}\right|$ sustituye a la columna i del determinante D.

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_{1k} - X_{1k} \right| & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_{nk} - X_{1k} \right| & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_{1k} - X_{nk} \right| & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} \left| X_{nk} - X_{nk} \right| & 1 \\ 1 & \cdot & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Es significativo que $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$ es una función que depende linealmente de los módulos que contienen $X_1,\ldots, X_k$ y *si los módulos pueden ser eliminados*, entonces se podrá escribir el valor estimado como $Y = \sum_{i=1}^{n-1} C_i X + d_i$.

Puesto que Kriging es un interpolador exacto entonces esta ecuación se satisface para los n puntos, luego, es la misma que la que se obtiene por Interpolación Lineal.

Ilustremos con el caso R^2 :

Sean dos puntos de R^2: (X_1,Y_1) y (X_2,Y_2) con $X_1 \neq X_2$.

Kriging: $Y = a_1Y_1 + a_2Y_2$

$$d_{11}a_1 + d_{12}a_2 + \mu = d_1$$
$$d_{21}a_1 + d_{22}a_2 + \mu = d_2$$
$$a_1 + a_2 + 0u = 1$$

Solución por el método de Kramer (recordando que $d_{11} = d_{22} = 0$):

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 1 \\ d_{21} & d_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = d_{12} + d_{21} = 2d_{12}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & d_{12} & 1 \\ d_2 & d_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -d_1 + d_2 + d_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_1 & 1 \\ d_{21} & d_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = d_1 - d_2 + d_{12}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & 1 \\ d_{21} & d_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = d_2 * d_{12} + d_1 * d_{12} - d_{12}^{\ 2}$$
$$= d_{12}(d_2 + d_1 - d_{12})$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} \quad a_2 = \frac{D_2}{D} \quad \mu = \frac{D_3}{D} \text{ y por tanto}$$

Si suponemos $X_2 > X_1$ se cumple que $X_1 \leq X \leq X_2$ y por tanto:

$D = 2(X_2-X_1)$ $D_1 = 2(X_2-X)$ $D_2 = 2(X-X_1)$ $D_3 = 0$, de donde se deduce que

$$a_1 = \frac{X_2 - X}{X_2 - X_1} \text{ y } a_2 = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1}$$ y la ecuación de estimación se escribe :

$$Y = \frac{X_2 - X}{X_2 - X_1} Y_1 + \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} Y_2$$

y esta es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos que puede escribirse:

$$Y = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)} X + \frac{(Y_1X_2 - Y_2X_1)}{(X_2 - X_1)}$$ que es la fórmula conocida para la interpolación lineal para este caso.

El error de Kriging es $\sigma^2 = a_1d_1 + a_2d_2 + \mu =$

$$= 2\frac{(X_2 - X)(X - X_1)}{(X_2 - X_1)}$$

Caso de R^3

En R^3 se tiene que este método es aplicable directamente para redes rectangulares. Para redes arbitrarias podemos *definir un variograma a partir del módulo de las diferencias de los valores obtenidos al evaluar dos puntos en el plano*. De esta manera se tiene la equivalencia formal entre ambas teorías, lo cual puede extenderse para casos más generales y que con ciertas consideraciones permite obtener los errores. Este caso reviste particular interés, pues permite modelar de una manera sencilla una superficie topográfica y evaluar los errores de estimación.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado la relación que existe entre una de las fórmulas para estimar por Kriging y la interpolación lineal en R^n. A partir de lo anterior se logra estimar el error de interpolación lineal lo cual resulta de gran importancia práctica, sobre todo cuando los datos que disponemos de la función vienen dados por una tabla numérica. Esto ha permitido obtener un algoritmo fiable para la modelación de superficies topográficas.

BIBLIOGRAFÍA

BUBRINSKI, V.A.: *Geometría del subsuelo*, Editorial Nedra, Moscú, 1985.

CHENEY, W. y DAVID KINCAID: *Numerical Mathematics and Computing*, Brocks/Cole Publihing Company, USA, 1985.

CHICA OLMO, MARIO: *Análisis geoestadístico en el estudio de la explotación de los Recursos Minerales*, Universidad de Granada, España, 1988.

DANILINA, N.I. y otros: *Matemática de cálculo*, Editorial MIR, Moscú, 1990.

DEMIDOVICH, B.P. y Y.A. MARON: *Computational Mathemathics*, Editorial Mir, Moscú, 1973.

GARCÍA GUERRA, PEDRO ALFONSO: *Geostadística operacional*, Departamento Nacional de Producción Mineral, Brasil, 1988.

ISAACSON, EUGENE y HERBERT BISHOP KELLER: *Analysis of Numerical Methods*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

MYERS, DONALD E.: «Interpolation and estimation with spatially located data. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems», 11, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991.

TIMOFENKO, E.L. y A.P. RILOV: *Geometría minera*, Editorial Nedra, Moscú, 1987.

PANNATIER, YVAN: *VarioWin 2.1. Phd Project*, University of Laussanne, Laussanne, Switzerland, 1994.

TESIS DE DOCTORADO DEFENDIDA EN EL CURSO 97-98 EN EL INSTITUTO SUPERIOR MINERO METALÚRGICO DE MOA

Preparación por vía húmeda de la mena laterítica

Autor: Alberto Hernández Flores

Profesor Auxiliar del Departamento de Metalurgia

Síntesis:

Aplicando la «Teoría de separación del profesor Tijonov» se llega a demostrar la beneficialidad de la mena. El autor plantea que para alcanzar una mayor eficiencia en la preparación mecánica del mineral no es necesario la modificación de las condiciones de lavado, sino que basta con introducir la reducción previa del tamaño de las partículas. En el trabajo se ofrecen las características de separación del equipamiento para el beneficio por el diámetro y la susceptibilidad magnética de las partículas, con la especificidad de que, en la separación gravimétrica, la propiedad preponderante la constituye el diámetro y no la densidad de las fracciones. Se establece asimismo la relación entre la calidad de la mena y la composición mineralógica en la tecnología húmeda. Se realiza además la valoración económica del incremento de la eficiencia en la preparación mecánica y resultan favorables los indicadores económicos con relación a los costos de una posible inversión. Finalmente, se evalúa el efecto del rechazo y los escombros sobre el medio ambiente.