

# *La simulación condicional en geoestadística*

## *The Conditional Simulation in Geostatistic*

**José Quintín Cuador Gil<sup>1</sup>**  
**Arelys Quintero Silverio<sup>2</sup>**  
**Elmidio Estévez Cruz<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Profesor Asistente del Departamento de Computación, Universidad de Pinar del Río.

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Universidad de Pinar del Río.

<sup>3</sup>Departamento de Geología, Universidad de Pinar del Río.

**Resumen:** La estimación propuesta por la geoestadística a través del procedimiento de kriging es sin lugar a dudas la mejor posible, pues aporta el mejor estimador lineal insesgado; una muestra de ello es el número creciente de aplicaciones en ciencias de la Tierra donde es utilizada actualmente: la industria minera, la industria del petróleo, los estudios ambientales, etc. Este estimador de acuerdo con las condiciones con que es obtenido, muestra una imagen suave de la realidad que se estudia; una alternativa para esta situación es la simulación, que tiene como objetivo presentar una de las posibles realizaciones de una función aleatoria con las mismas características de variabilidad espacial que esta realidad. En este artículo se presentan los elementos fundamentales de la teoría de la simulación condicional.

**Palabras claves:** Geoestadística, variograma, kriging, simulación condicional, función.

**Abstract:** The geostatistical estimation proposed by the Kriging process is the best possible estimation because it provides the best linear unbiased estimation. A good example of it is the increasing number of applications in the Earth Sciences where it is used nowadays: mining industry, petrol industry, environmental study, etc. This estimator, under the condition which is obtained, shows a smoother representation of the reality that is being studied. So, an alternative for this situation is the simulation, which main aim is to present one of the possible realization of the Random Function with the same spatial variability characteristics of the reality. The principal topics of the Conditional Simulation Theory are presented in this paper.

**Keywords:** Geostatistic, Variogram, Kriging, Conditional Simulation, Random Function, Algorithm

### INTRODUCCIÓN

La geoestadística, se define de forma general, como el estudio de las variables numéricas distribuidas en el espacio (Chauvet, 1994), su estimador, *el kriging (kriging)*, término creado por G. Matheron en 1962, tiene como objetivo encontrar el *mejor estimador lineal insesgado* a partir de la información disponible (Chica-Olmo, 1987). En efecto, el estimador obtenido  $Z^*$  consiste en una combinación lineal de pesos asociados a cada localización donde fue muestreado un valor  $Z$  del fenómeno estudiado, en el que se observan dos condiciones fundamentales:

1. Que el estimador sea insesgado.  
 $E[Z^* - Z] = 0$ ,
2. Que la varianza  $\text{Var}[Z^* - Z]$  sea mínima.

La estimación, obtenida de esta forma, al igual que otros interpoladores, proporciona una imagen suavizada o lisa de la realidad, por lo que no es suficiente conocer los valores estimados; antes de utilizar sus resultados es conveniente observar la dispersión del fenómeno estudiado (Journel, 1974). Como se considera en geoestadística que la realidad desconocida es una realización particular de una función aleatoria

(Journel y Huijbregts,1978), se propone entonces realizar una simulación que no sea una representación suave o lisa de la realidad, sino mas bien una nueva realización del mismo fenómeno estudiado, de modo que presente las mismas características de variabilidad y correlación encontrada en los datos experimentales.

En este artículo se presentan los objetivos fundamentales de la simulación geoestadística, la cual desde su introducción por G. Matheron, y su desarrollo por A. Journel (Journel,1974) y D. Guibal (Guibal,1972), ha jugado un importante papel en la aplicaciones de la geoestadística (Lantuéjoul,1997) en la simulación condicional de yacimientos mineros (Journel,1974), (Chica-Olmo,1987), en la simulación de litofacies en la industria del petróleo (Le Loc'h y Galli,1997), en la representación de modelos de reservorios petroleros (Allard,1993), en la modelación de reservorios hidrogeológicos (Dietrich,1995) y en la presentación de procesos geofísicos (Christakos y Panagopoulos,1992).

### Estimación o simulación, dos alternativas

La *estimación* tiene como objetivo proporcionar en cada localización a estimar un valor  $Z^*(x)$ , lo más próximo posible del valor real y desconocido  $Z(x)$  del fenómeno estudiado. Esta estimación, no tiene por ninguna razón reproducir la dispersión de los datos reales, más bien, la estimación subestima, en general, esta dispersión (Journel,1974) al no reproducir las características de variabilidad espacial de los datos reales.

Por otra parte la *simulación* o mejor la *simulación condicional*, reproduce los dos primeros momentos experimentales (media y covarianza  $C(h)$  o Semivariograma  $\gamma(h)$ ) de los datos reales, así como el histograma, es decir, se reproducen las principales características de dispersión del fenómeno real de acuerdo con la información disponible. Ahora, en cada localización el valor simulado  $Z_s(x)$  no es el mejor estimador de  $Z(x)$  que se puede obtener.

Si nos hacemos la pregunta: ¿En qué son diferentes la simulación y la estimación?, podemos responder que sus diferencias están relacionadas con sus objetivos (Journel,1974), los cuales no son en general compatibles, por lo que en dependencia de los intereses en una aplicación o investigación se utilizará una u otra. La estimación y la simulación son dos alternativas que se complementan.

### Teoría de la simulación condicional

Consideremos los datos experimentales  $Z(x_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , con media  $m$  y covarianza  $C(h)$  o Semivariograma  $\gamma(h)$ .

En una estimación se obtiene un valor  $Z^*(x)$  por cada localización a estimar, este valor, según las condiciones con que fue construido el procedimiento de *krigeage*, es el mejor valor posible, es decir, el más próximo al valor real a partir de la información disponible. Por tanto, como no existe ningún método por muy

sofisticado que sea, que proporcione una estimación exacta a una realidad desconocida, solo es posible plantear que el valor estimado por Krigeage  $Z_k^*(x)$  es aproximado al valor real y desconocido  $Z(x)$ .

No es difícil comprender que estos valores son diferentes en la cantidad  $[Z(x) - Z_k^*(x)]$  de modo que la aproximación anterior se puede completar de forma exacta como:

$$Z(x) = Z_k^*(x) + [Z(x) - Z_k^*(x)] \quad (1)$$

Pero, esta diferencia,  $[Z(x) - Z_k^*(x)]$ , es siempre desconocida, porque se desconocen los valores de las localizaciones no muestreadas, solo es posible conocer su valor en las localizaciones muestreadas, los cuales son nulos, debido a que el *krigeage* es un interpolador exacto (Matheron,1970), es decir la estimación en la localizaciones muestreadas coincide con el valor real medido.

El problema consiste entonces en encontrar un modo de obtener la diferencia  $[Z(x) - Z_k^*(x)]$ , lo que solo es posible mediante una simulación. La geoestadística propone este procedimiento generando primero valores de una función aleatoria  $Z_s(x)$  a partir de las características de variabilidad de la información experimental disponible  $Z(x_i)$ , a la cual posteriormente son condicionados (Lantuéjoul, 1998; Rivoirard,1998).

Para ilustrar los planteado hasta aquí, consideremos que los valores experimentales  $Z(x_i)$  se distribuyen espacialmente según la Figura 1, los cuales pueden distribuirse regular o irregularmente y además pueden existir combinaciones entre estos.

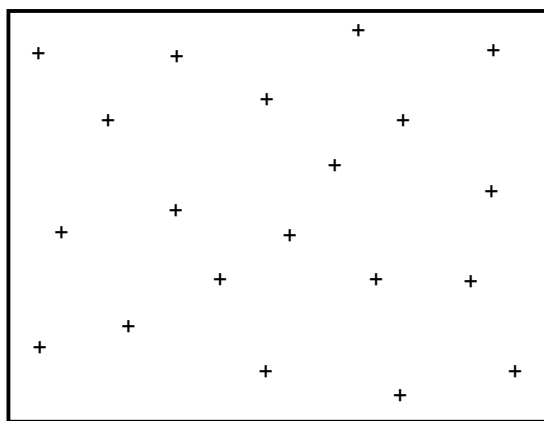


FIGURA 1. Localizaciones muestreadas.

Consideremos ahora una red, con un espaciamiento tal que abarque todas las localizaciones que se desean simular (Figura 2), sobre la misma zona de estudio, obteniéndose un conjunto de localizaciones compuestas por los puntos de la red y aquellos donde se conoce un valor experimental. En cada localización de este conjunto se generan valores de una función aleatoria  $Z_s(x)$  a partir de las características de variabilidad obtenida de la información inicialmente disponible, este proceso se conoce como *simulación no*

condicional, para lo cual existen diferentes métodos (Journel,1974), (Journel y Huijbregts,1978), (Lantuéjoul,1994), (Lantuéjoul,1998), (Rivoirard,1998).

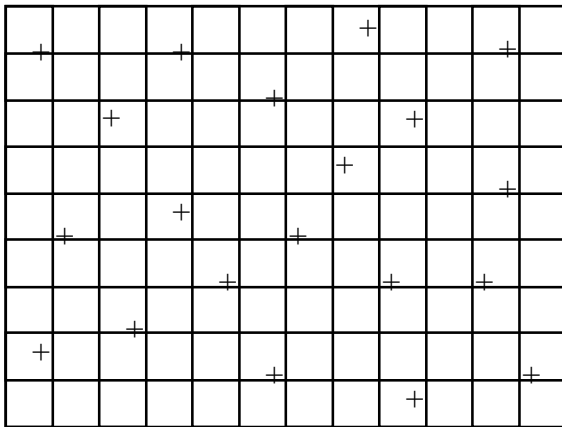


FIGURA 2. Red de puntos a simular.

Posteriormente, con el objetivo de condicionar la simulación a los valores experimentales, se realiza la estimación por *krigeage* de cada punto de la red a partir del conjunto de valores simulados de forma no condicional en las localizaciones donde se conocen datos experimentales, obteniéndose los valores  $Z_{sk}^*(x)$ ; a partir de estos valores y los simulados de forma no condicional  $Z_s(x)$ , se puede simular la diferencia  $Z(x) - Z_{sk}^*(x)$  como  $Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)$ , por lo que la expresión (1) se puede sustituir por:

$$Z_{sc}(x) = Z_{sk}^*(x) + [Z_s(x) - Z_{sk}^*(x)]$$

donde:

- $Z_{sc}(x)$ , es el valor simulado en el punto  $x$  por la simulación condicional.
- $Z_{sk}^*(x)$ , es el valor estimado en el punto  $x$  por el procedimiento de *krigeage*, a partir de los datos experimentales.
- $Z_s(x)$ , es el valor simulado en el punto  $x$  por la simulación no condicional.
- $Z_{sk}^*(x)$ , es el valor estimado en el punto  $x$  por el procedimiento de *krigeage*, a partir de los valores simulados no condicionalmente en las localizaciones correspondientes a los datos experimentales.

De esta forma se obtienen valores simulados, uno por cada localización de la red, que son en conjunto una realización particular de la función aleatoria de las tantas posibles, de la cual la realidad desconocida lo es también, pero que refleja las mismas características de variabilidad y correlación de esta realidad.

**Algoritmo de simulación condicional**

Consideremos el caso en una dimensión para facilitar la explicación. Se poseen  $Z(x_i)$ ,  $i=1, \dots, n$  datos experimentales, en la Figura 3 se representa su distribución espacial en un gráfico de los valores medidos  $Z$  contra su posición  $x$ .

Es importante señalar aquí que los datos iniciales pueden distribuirse de forma regular o irregular, en el ejemplo tomaremos el segundo caso.

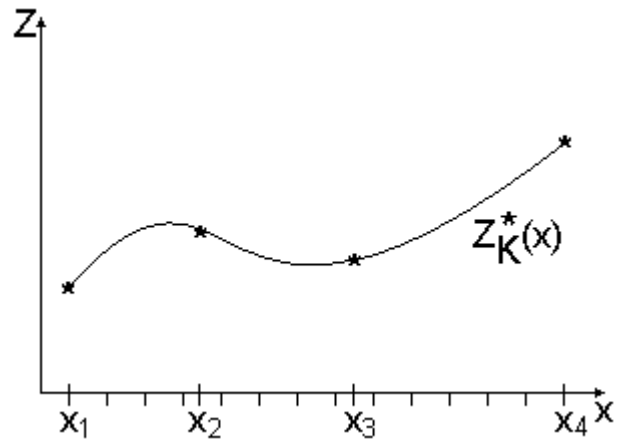


FIGURA 3. (—) Valores  $Z_{K}^*(x)$ , obtenidos por *krigeage* a partir de los datos experimentales, en las localizaciones propuestas a simular.

1. Mediante un análisis estructural es posible obtener un modelo que represente las características de variabilidad y correlación espacial del fenómeno estudiado.
2. Se proponen una serie de localizaciones en la misma zona de estudio, donde se desee simular el fenómeno analizado (Figura 3); en dos dimensiones una red de puntos, y en tres dimensiones una distribución regular de puntos en el interior de un volumen.
3. Se estima un valor en cada localización propuesta por *krigeage* a partir de los datos experimentales, obteniéndose los valores  $Z_{K}^*(x)$ . (Figura 3). Como se puede apreciar la estimación realizada es una representación suave de una realidad desconocida.
4. Se generan simulaciones no condicionadas, en las localizaciones propuestas y en las localizaciones donde se poseen datos experimentales, a partir de las características de variabilidad obtenidas en el primer paso, obteniéndose los valores  $Z_s(x)$  (Figura 4).

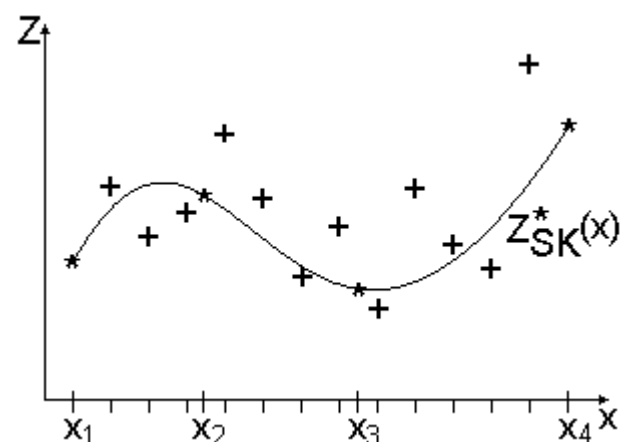


FIGURA 4. (+) valores  $Z_s(x)$  simulados no condicionalmente, y (—) valores  $Z_{SK}^*(x)$ , obtenidos por *krigeage* a partir de los datos simulados en las localizaciones muestreadas.

Note, que si los puntos experimentales son regulares, las localizaciones muestreadas coinciden con sus correspondientes localizaciones propuestas en la simulación.

5. Se estiman nuevamente las localizaciones propuestas a simular por *krigeage*, pero esta vez a partir de los valores simulados en las localizaciones correspondientes a los datos experimentales, obteniéndose los valores  $Z_{SK}^*(x)$  (Figura 4).
6. Calcular la diferencia  $[Z_S(x) - Z_{SK}^*(x)]$ , para cada localización de la red propuesta (Figura 4).
7. Sumar a la estimación obtenida en el paso 3 (Figura 3), la correspondiente diferencia calculada en el paso anterior (Figura 4), condicionándose de esta forma la simulación, y obteniéndose el valor simulado  $Z_{SC}^*(x)$ . (Figura 5).

Los pasos anteriores pueden ser generalizados sin dificultad, a dos o tres dimensiones.

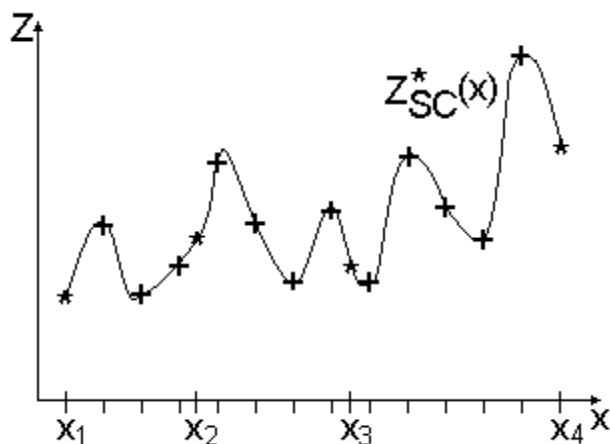


FIGURA 5. (—) valores  $Z_{SC}^*(x)$  obtenidos por simulación condicional.

## CONCLUSIONES.

En el proceso de simulación se obtiene una representación con iguales características de variabilidad y correlación que la realidad que se estudia. Este proceso se concentra fundamentalmente en la generación de valores a partir de una función de covarianza fija, obtenida del análisis estructural de la información experimental disponible, valores que posteriormente son condicionados a esta información experimental. Esta simulación a diferencia de la estimación que proporciona una representación suave o lisa de la realidad, es considerada como una de las posibles realizaciones de una función aleatoria, de la cual la realidad se considera también como una realización particular.

El éxito de la simulación está dado porque a través de su procedimiento se puede mostrar una representación de una realidad nunca conocida en la mayor cantidad de fenómenos estudiados, que, si no es la mejor estimación

que se puede obtener, sí muestra lo que podría ser el fenómeno real de forma general ya que reproduce los dos primeros momentos experimentales (media y covarianza  $C(h)$  o semivariograma  $g(h)$ ) de los datos reales disponibles, así como su histograma.

No se debe distinguir entre simulación o estimación como dos alternativas que se contradicen, sus objetivos son diferentes y no compatibles. Dependiendo de los intereses que se persiguen en una aplicación o investigación se deben usar, como dos alternativas que se complementan: la simulación para obtener una representación del fenómeno de forma general y la estimación para obtener el mejor valor estimado en cualquier localización puntual o de bloque.

## BIBLIOGRAFÍA

- ALLARD, D.: "Simulation du Modèle Gaussien Seuillé Conditionné par des Contraintes de Connexité", en *Compte-rendu des Journées de Géostatistique*, 25-26 Mai 1993, Fontainebleau, France, 1993, pp. 21-34.
- CHAUVET, P.: *Aide-Memoire de Géostatistique minière*, École des Mines de Paris, France, 1994, pp. 210.
- CHICA-OLMO, M.: "Análisis geoestadístico en el estudio de la explotación de recursos minerales", Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España, 1987, 387 pp.
- CHRISTAKOS, G. y C. PANAGOPOULOS: "Space Transformation Methods in the Representation of Geophysical Random Fields", en *IEEE Transformation on Geosciences and Remote Sensing*, vol. 30, no. 1, 1992, pp. 55-70.
- DIETRICH, C.D.: "A Simple and Efficient Space Domain Implementation of Turning Band Methods", en *Water Resources Research*, vol. 31, no. 1, 1995, pp. 147-156.
- GUIBAL, D.: "Simulation de Schémas Intrinsèques", en *CGMM, ENSMP*, N-291, France, 1992, 38 pp.
- JOURNEL, A.G.: "Simulation Conditionnelle de Gisements Miniers. Theorie e Pratique", Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, France, 1974, 110 pp.
- JOURNEL, A. y CH. HUIJBREGTS: *Mining Geoestatistic*, Ed. Academic Press New York, 1978, 600 pp.
- LANTUÉJOL, CH.: "Non Conditional Simulation of Stationary Isotropic Multigaussian Random Functions", en Armstrong, M. y P.A. Dowd: *Geostatistical Simulation*, Kluwer Dordrecht, 1994, pp. 147-177.
- \_\_\_\_\_ : "Interactive Algorithms for Conditional Simulations", en *Geostatistics Wollongong '96*, vol. 1, 1997, pp. 27-40.
- \_\_\_\_\_ : Notas de clases del curso Simulación en el Entrenamiento de Postgrados CFSG "Ciclo de Formación de Especialistas en Geoestadística", Curso 1997-1998, Centro de Geoestadística de la Escuela Superior de Minas de Paris, Fontainebleau, Francia, 1998.
- LE LOC'H, G. y A. GALLI: "Truncated Plurigaussian Methods: Theoretical and Practical Point of View", en *Geostatistics Wollongong '96*, Vol. 1, 1997, pp. 211-222.
- MATHERON, G.: *La Théorie des Variables Régionalisées, et ses Applications*, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 5, France, 1970, 112 pp.
- RIVOIRARD, J.: Notas de clases del curso Simulación, en el Entrenamiento de Postgrados CFSG "Ciclo de Formación de Especialistas en Geoestadística", Cursos: 1995-1996 y 1997-1998, Centro de Geoestadística de la Escuela Superior de Minas de Paris, Fontainebleau, Francia, 1998.