Simulación no condicional, método de las bandas rotantes en 3D

Non Conditional Simulation, Turning Bands Method in 3D

Arelys Quintero Silverio[1]
José Quintín Cuador Gil[2]
Elmidio Estévez Cruz[3]

[1]Profesora Asistente del Departamento de Computación, Universidad de Pinar del Río.
[2]Departamento de Matematica, Universidad de Pinar del Río.
[3]Departamento de Geología, Universidad de Pinar del Río.

RESUMEN: La simulación geoestadística se sustenta fundamentalmente en la generación de valores a partir de las características de variabilidad obtenida de la información disponible del fenómeno en estudio, esto es la simulación no condicional, estos valores son posteriormente condicionados a los datos experimentales, obteniéndose una de las posibles realizaciones que son representativas de la realidad estudiada. La generación de simulaciones se hace observando una función de covarianza fija, para lo cual existen diferentes métodos en los procesos estocásticos. En este trabajo se presenta uno de los métodos mas usados en la simulación geoestadística, el método de las bandas rotantes *(Turning Bands)* para tres dimensiones.

Palabras claves: Geoestadística, variograma, *krigeage*, simulación no condicional, bandas rotantes, algoritmo.

ABSTRACT: The Geostatistic Simulation is mainly sustained in the generation values from the variability characteristics of the available information of the studied phenomenon, that is the Non Conditional Simulation. These values are conditioned to experimental data, obtaining one of the possible realizations representative fro the studied reality. The generation of simulations is performed observing a fixed covariance function, having several methods in the stochastic processes. One of the most used methods in the Geostatistic Simulation is presented in this paper: the Turning Bands Method for Three Dimensions.

Keywords: Geostatistic, Variogram, Krigeage, Non Conditional Simulation, Turning Bands, Algorithm

INTRODUCCIÓN

Las herramientas matemáticas para la modelación de fenómenos distribuidos espacialmente han sido ampliamente difundidas en la actualidad, por la cantidad de campos de investigación que presentan esta distribución, entre los que se pueden citar como ejemplos: la industria minera (Journel,1974; Journel y Huijbregts,1978; Chica-Olmo,1987), la modelación de reservorios petroleros (Allard,1993), etc. Estos fenómenos que presentan una distribución en el espacio, por ejemplo, la mineralización en un yacimiento, campo en el cual culmina la generalización de la geoestadística lineal propuesta por G. Matheron en su tesis doctoral en 1965 (Matheron, y Kleingeld,1987), manifiestan dos aspectos contradictorios (o complementarios), uno aleatorio, por la variaciones imprevisibles de un punto a otro, y el otro estructural, que se refleja en la continuidad de la mineralización o característica estudiada.

La teoría de la variable regionalizada propuesta por Matheron tiene dos objetivos principales, en el plano teórico, expresar sus características estructurales bajo una forma matemática adecuada, en el plano práctico, resolver el problema de la estimación a partir de la información fragmentaria obtenida en el proceso de exploración minera o de muestreo, para lo que la geoestadística propone el *krigeage*.

Este procedimiento de *krigeage,* como todo interpolador exacto da una imagen mas lisa del yacimiento que la realidad, lo que implica que el modelo obtenido por *krigeage* dará una imagen errónea de la variabilidad espacial a pequeña escala (Armstrong y Carignan,1997), en este caso es necesario hacer una llamada a la simulación condicional del yacimiento.

La simulación condicional usando el *krigeage* fue propuesta por Matheron en el comienzo de los años 70 (De Fouquet,1993), estos métodos de simulación nos permiten construir una realización de una función aleatoria con un covarianza fija, condicionada a la información disponible, es decir, a partir de la covarianza o correlación espacial obtenida de la información fragmentaria inicial de la exploración del yacimiento, se generan simulaciones que son posteriormente condicionadas a los datos conocidos, de modo que el valor simulado en estas localizaciones coinciden con los datos reales, y en el resto de la localizaciones no muestreadas, presentan en conjunto las mismas característica de variabilidad de la información real desconocida de la cual es representativa la información disponible.

Se destacan en el procedimiento de Simulación Condicional dos etapas importantes: primero la generación de valores simulados a partir de una función de covarianza fija, es decir la simulación no condicional, y segundo: el *krigeage* condicionante de las simulaciones anteriores, lo cual viene expresado en la siguiente expresión:

$$Z_{SC}(x) = Z_K^*(x) + [Z_S(x) - Z_{SK}^*(x)] \quad \mathbf{(1)}$$

donde:

- **Z_{SC}(x),** es el valor simulado en el punto x por la simulación condicional.
- **Z_K*(x),** es el valor estimado en el punto x por el procedimiento de *Krigeage,* a partir de los datos experimentales.
- **Z_S(x),** es el valor simulado en el punto x por la simulación no condicional .
- **Z_{SK}*(x),** es el valor estimado en el punto x por el procedimiento de *krigeage*, a partir de los valores simulados no condicionalmente en la localizaciones correspondientes a los datos experimentales.

En lo anteriormente planteado se puede apreciar que la simulación geoestadística se sustenta fundamentalmente en la simulación no condicional, es decir en la correcta generación de valores simulados con una covarianza fija. En este artículo se presenta y discute uno de los métodos mas usados en la práctica minera para la generación de simulaciones no condicionales, el método de las bandas rotantes (Turning Bands).

El método de las bandas rotantes en 3d

El método de bandas rotantes, (Turning Bands, en inglés), fue inicialmente concebido por G. Matheron (Matheron,1972), desarrollado por A. Journel, y D. Guibal (Journel,1974), discutido en una amplia variedad de aplicaciones por diferentes autores (Dietrich,1995), por lo que ha sido muy utilizado en la práctica, permitiendo simular una realización $Z_S(x)$ no condicional de una función aleatoria Z(x) con distribución gaussiana (Chica-Olmo,1987), y de covarianza fija $C_n(h)$.

De forma general es mas difícil obtener simulaciones en más de una dimensión, por lo que es conveniente para realizar una simulación en tres dimensiones, obtener esta por las contribuciones de valores simulados en una dimensión.

El principal objetivo de este método de las bandas rotantes es la reducción de simulaciones de tres dimensiones en varias simulaciones en una dimensión, las simulaciones en una dimensión se generan sobre rectas que al hacerse rotar en espacio generan otras simulaciones, permitiendo en conjunto construir una realización de una función aleatoria de covarianzas $C_3(h)$, este proceso en la práctica se realiza de forma discreta a través de un conjuntos de rectas distribuidas uniformemente el espacio.

La reducción de la covarianza impuesta en tres dimensiones $C_3(h)$ a una covarianza en una dimensión $C_1(h)$ se realiza por la siguiente relación (Lantuéjoul,1998) (Rivoirard,1998):

$$C_1(h) = \frac{\partial}{\partial h}\left[hC_3(h)\right] \qquad \textbf{(2)}$$

La generación de valores sobre las rectas se hace de forma libre, usando cualquiera de los procedimientos que se presentan en la teoría de los procesos estocásticos, uno de estos puede ser el de las medias móviles, según el cual estas covarianzas en una dimensión, pueden ser expresadas como el producto de convolución de una función f(u) y su transpuesta fÚ(u) = f(-u):

$$C_1(h) = f(u) * f^{v}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) * f(u+h)\,du \qquad \textbf{(3)}$$

de modo que a partir de las covarianzas C_1(h)btener la función f(u).

Las simulaciones sobre rectas, se pueden obtener a partir de una función aleatoria uniformemente distribuida Y(u), a través de la siguiente expresión.

$$Y(u) = T * f^{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} T(r) * f(r+u)\,dr \qquad \textbf{(4)}$$

donde:T(r) representa una sucesión de variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo [0,1].

Esta simulación sobre rectas se realiza de forma discreta (Figura 1), por la expresión:

$$Y_i(x) = \sum_{k=-a/2}^{k=a/2} t_{i+k} f(kb) \qquad \textbf{(5)}$$

donde.

i	es la i-ésima recta.
$Y_i(x)$	valor simulado en la i-ésima recta.
a	el alcance del modelos teórico obtenido en el paso 1.
t_{i+k}	son realizaciones independientes de una función aleatoria uniformemente distribuidas.
f(kb)	es la función de ponderación f(u)
b	es el intervalo de separación de las ban das, el cual se sugiere el espaciamiento de la red.

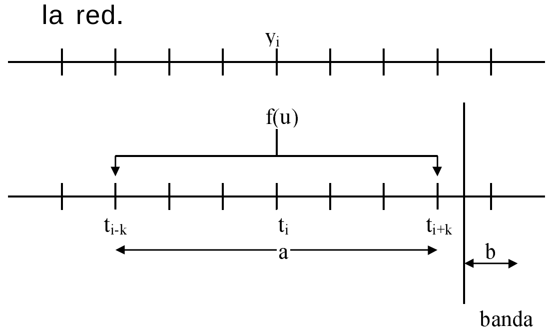

FIGURA 1. Simulación sobre rectas.

La cantidad de rectas sobre las que se recomienda generar simulaciones independientes es 15, distribuidas según las rectas que unen los puntos centrales de las aristas de un icosaedro regular (Journel, 1974), un icosaedro es un poliedro convexo regular con número de caras igual a 20 y 30 aristas (Figura 2).

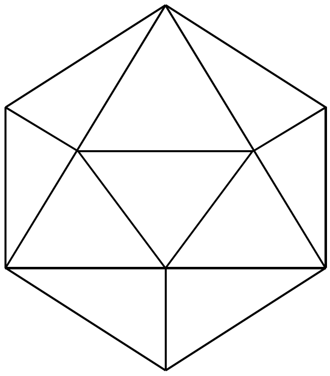

FIGURA 2. Icosaedro regular.

La simulación $Z_S(x)$ se obtiene por la contribución de las N rectas utilizadas en las simulaciones independientes, a través de la expresión:

$$Z_S(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} Z_i(x) \qquad \textbf{(6)}$$

donde $Z_i(x)$ es el valor simulado en la i-ésima recta en la banda que incluye al punto de proyección correspondiente.

Aplicación a los modelos de covarianza más comunes

Modelo esférico

La covarianza del modelo esférico es:

$$C_3(h) = C\left[1 - \frac{3h}{2a} + \frac{1}{2}\frac{h^3}{a^3}\right] \qquad h \le a$$

Por la ecuación (2), derivando el producto de *h* por C3(*h*) respecto a *h*, obtenemos:

$$C_1(h) = C\left[1 - \frac{3h}{a} + 2\frac{h^3}{a^3}\right] \qquad h \le a$$

Como esta covarianza en una dimensión se puede expresar como el producto de convolución según (3) es posible obtener como función de ponderación f(u) la siguiente expresión;

$$f(u) = \begin{cases} \left(\sqrt{12\, C/a^3}\right) u & -a/2 < u < a/2 \\ 0 & Sino \end{cases}$$

Modelo exponencial

Teniendo en cuenta el mismo razonamiento para la covarianza exponencial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$C_3 = C e^{-h/a} \qquad h \ge 0$$

$$C_1 = C\left(1 - \frac{h}{a}\right) e^{-h/a} \qquad h \ge 0$$

$$f(u) = \begin{cases} 2\sqrt{C/a}\left(1 - u/a\right) e^{-u/a} & u \ge 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

Modelo Gaussiano

Para la covarianza gaussiana se obtiene:

$$C_3(h) = C e^{-\frac{h^2}{a^2}} \qquad h \ge 0$$

$$C_1(h) = C\left(1 - 2\frac{h^2}{a^2}\right) e^{-\frac{h^2}{a^2}} \qquad h \ge 0$$

$$f(u) = 16\, C/a^3 \sqrt{\pi}\, u\, e^{-2u^2/a^2} \qquad \forall\, u \in [-\infty, +\infty]$$

Algoritmo para la simulación no condicional por las bandas rotantes

1. Determinar $C_3(h)$, que caracterice la variabilidad espacial del fenómeno de interés a partir de la información inicial disponible.
2. Dada la covarianza $C_3(h)$, encontrar la correspondiente covarianza $C_1(h)$, por la expresión (2).
3. Definir las líneas sobre las cuales se van a simular realizaciones en una dimensión, para lo cual se sugieren las líneas que unen los puntos medios de las aristas de un icosaedro regular.
4. Generar simulaciones sobre las 15 rectas definidas con covarianza $C_1(h)$ fija de forma independiente por (5).
5. Simular la realización de una función aleatoria en R^3, por la contribución de los procesos aleatorios en R^1 por la expresión (6), para lo que se proyecta cada punto del espacio donde se desea obtener un valor simulado sobre las rectas donde se han realizado simulaciones en una dimensión, tomando el valor Zi(x) de la banda que contiene a este punto proyectado sobre la recta i.
6. Comprobar la veracidad de la simulación obtenida, comparando la función covarianza $C_3(h)$ o

Variograma $\gamma(h)$ con la covarianza o el variograma obtenido experimentalmente a partir de la información simulada.

CONCLUSIONES

Las simulaciones no condicionales, permiten obtener una realización de una función aleatoria que refleje las mismas característica de variabilidad y correlación que una función de covarianza dada. Estas simulaciones son posteriormente condicionadas a los datos reales según ecuación (1).

En el caso de la generación de simulaciones no condicionales por el método de las bandas rotantes en 3D, se reduce la función de covarianza que se desea simular de 3 dimensiones a 1 dimensión por la ecuación (2), con el objetivo de realizar la generación de valores a lo largo de rectas por ser menos engorroso. Para la generación de valores a lo largo de las líneas se puede utilizar cualquier procedimiento de los procesos estocásticos, uno de los mas usados conocido como el de las medias móviles propone que la covarianza a una dimensión se puede representar como el producto de convolución de una cierta función, ecuación (3), lo que permite la generación de simulaciones a través de (4), expresión que puede ser aproximada de forma discreta por (5). En la práctica las rectas se distribuyen según las líneas que unen los puntos medios de las aristas de un icosaedro regular. Los valores simulados en el espacio se obtienen por la contribución de la valores generados en las rectas, en las bandas que incluye a los puntos de proyección correspondiente.

BIBLIOGRAFÍA

ALLARD, D.: Simulation du Modèle Gaussien Seuillé Conditionné par des Contraintes de Connexité, en *Compte-rendu des Jounées de Géostatistique*, 25-26 Mai 1993, Fontainebleau, France, 1993, pp. 21-34.

ARMSTRONG, M. y J. CARIGNAN: *Géostatistique Linéaire, Application au Domaine Minier*, École de Mines de Paris, France, 1997, 112 p.

CHICA-OLMO, M.: “Análisis geoestadístico en el estudio de la explotación de recursos minerales”, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España, 1987, 387 pp.

DIETRICH, C.D.: “A Simple and Efficient Space Domain Implementation of Turning Band Methods”, en *Water Resourses Research*, Vol. 31, no. 1, 1995, pp. 147-156.

DE FOUQUET, CH.: *Reminders on the Conditioning Kriging. Geostatistical Simulations, Proceeding of The Geosttistical Simulation WorkShop*, Fontainebleau, France, 27-28 May, 1993, pp. 131-145.

JOURNEL, A.G.: “Simulation Conditionnelle de Gisements Miniers. Theorie e Pratique”, Thèse Docteur-Ingénieur, ENSMP, France, 1974, 110 pp.

JOURNEL, A. y CH. HUIJBREGTS: *Mining Geoestatistic*, Ed. Academic Press New York, 1978, 600 pp.

LANTUÉJOUL, CH.: Notas de clases del curso Simulación, en el entrenamiento de postgrados CFSG “Ciclo de Formación de Especialistas en Geoestadística”, Curso 1997-1998, Centro de Geoestadística de la Escuela Superior de Minas de París, Fontainebleau, France, 1998.

MATHERON, G.: *The Turning Bands: a Method for Simulating Random Function in R*, Ed. CGMM, ENSMP, France, N-303, 1972.

MATHERON, G. y W.J. KLEINGELD: *The evolution of Geostatistics, APCOM 87, Proceesing of the Twentieth International Symposium of the Application of Computer and Mathematics in the Mineral Industries,* vol. 3, Geostatistics, Johanesburg, South-Africa SAIMM, 1987, pp. 9-12.

RIVOIRARD, J.: Notas de clases del curso Simulación, en el Entrenamiento de Postgrado CFSG Ciclo de Formación de Especialistas en Geoestadística, Cursos: 1995-1996 y 1997-1998, Centro de Geoestadística de la Escuela Superior de Minas de París, Fontainebleau, France, 1998.