SOBRE LA DETERMINACIÓN DE VALORES DE UNA VARIABLE EN LA GEOLOGÍA Y EN LA MINERÍA

ON THE DETERMINATION OF VALUES OF A VARIABLE IN GEOLOGY AND IN MINING

ARÍSTIDES LEGRÁ LOBAINA
DULCE MARÍA ATANES BEATÓN
ABEL VELÁZQUEZ PRATTS

E-mail: alegra@moa.minbas.cu
Instituto Superior Minero Metalúrgico

Universidad de Oriente

RESUMEN: En la práctica geológica y minera es usual realizar mediciones sobre una red del plano y, a partir de éstas, obtener modelos analíticos y gráficos de cierta característica de una zona y determinar algunos valores de la variable modelada. En este trabajo se analizan algunos principios generales sobre la determinación de estas variables en las ciencias geológicas y mineras, y se explican, a manera de ejemplo, algoritmos para obtener resultados gráficos y analíticos partiendo de splines bicúbicos.

Palabras claves: Modelos, estimación, interpolación, splines, curva de nivel.

ABSTRACT: In the geological and mining practical is an usual task carry out measurements on a grid of the plane and starting from its outputs get analytic models and graphics of certain characteristic of a zone and determining some values of the modeling variable. In this work some general principles on the determination of this variables in the geological and mining sciences are analyzed. As example are explained algorithms in order to get some graphic and analytic outputs starting from bicubics splines.

Key words: Models, Estimation, Interpolation, Splines, Bend of level.

INTRODUCCIÓN

En las ciencias geológicas y mineras se realizan mediciones de cierta variable, generalmente denominada Z, sobre una red del plano, que originan puntos del espacio real R^3 que denominaremos (X_i,Y_i,Z_i), donde puede suponerse que $Z_i=D(X_i,Y_i)$, D es una función en general desconocida y además i =1,…,n. A partir de estos datos, uno de los problemas principales que se plantean las ciencias geológicas y mineras (entre otras) es determinar, mediante ciertos métodos, valores aproximados de la variable Z; estos métodos, descritos en este caso por la función D, siempre están relacionados con una modelación. Luego, el problema esencialmente es encontrar entre todas la funciones $D:R^2 \rightarrow R$ aquella que mejor represente la relación entre $Z \in R$ y $(X,Y) \in R^2$ en cierto dominio de R^2.

Este trabajo tiene como objetivo exponer criterios de los autores sobre lo que consideran la esencia de la acción de determinar valores de una variable Z que refleje un fenómeno geológico minero, así como explicar a modo de ejemplo un método muy útil para la determinación de valores de Z como es el Spline Bicúbico, desarrollado mediante el Spline Cúbico Natural Iterado (técnica de modelación mediante curvas polinómicas planas por tramos). Encontrado el modelo de la superficie que describe el comportamiento de Z en cierta región del plano, se enuncian las reglas para el cálculo del volumen de la región que la superficie determina sobre el plano XY y la determinación de las curvas de nivel que la representan.

SOBRE LA DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE Z

Partiremos de un conocido tema de discusión: ¿cuál es el verbo que debe emplearse para describir la acción de obtener un valor de la variable Z en un punto (Xc,Yc)? Algunos geólogos o mineros podrían opinar que no debe emplearse el verbo CALCULAR, pues en este caso se asume de manera intuitiva que el resultado que se obtiene es exacto, lo cual en la práctica sucede en muy pocas ocasiones debido a que los datos del problema son generalmente aproximados y muchos métodos utilizados no proporcionan, por sí mismos, resultados exactos. Como respuesta, los matemáticos[1] pueden aducir que los números reales son teóricamente exactos y que su escritura puede realizarse exactamente sólo en contadas ocasiones; sin embargo, “se calcula” por ejemplo: Pi + Pi = 2 Pi y en la práctica del cálculo es necesario aplicar una de las partes que mayor relación tiene con el problema que analizamos, la Teoría de Errores, que estudia el origen, comportamiento (estadístico y durante la ejecución de los algoritmos) e influencia de los errores; además es una tarea principal el enunciar fórmulas (en general aproximadas) para determinar el error que se comete al ejecutar un algoritmo dado.

Podrían decidirse entonces a emplear el verbo ESTIMAR el cual, inmediatamente, hace pensar en que los resultados son aproximados aunque no se descarta que en algunos casos puedan ser exactos. Este verbo está estrechamente relacionado, en sus orígenes matemáticos, con la Estadística Matemática y con los Métodos de Inferencia Estadística (divididos en dos grandes ramas: Teoría de la Estimación Estadística y la Docimacia), por lo que en este caso se podría pensar que los métodos que no tienen el enfoque estadístico correspondiente deberían ser excluidos.

No deben excluirse de este análisis dos verbos que han sido empleados continuamente: INTERPOLAR y EXTRAPOLAR (Isaacson y Bishop, 1979; Cheney y Kincaid, 1985; Myers, 1991). El origen matemático de los mismos está dado en la necesidad de señalar la diferencia cuando se determina el valor de Z sobre un punto que está dentro de o en la frontera de los datos y cuando está fuera.[2] Una propiedad que se distingue en un método cuando interpola es el de ser EXACTO, lo cual significa que si se determina el valor de Z en uno de los datos (X_i,Y_i) se obtiene el valor medido Z_i;en otros puntos se obtiene una aproximación que pudiera ser o no el valor correcto. En otras palabras, emplear el verbo interpolar no implica automáticamente la exactitud de la determinación del valor de Z en los datos si no se aclara que se trata de una Interpolación Exacta. En la práctica, los matemáticos usan al referirse a los métodos de interpolación el adjetivo *interpolador* para expresar que el mismo puede realizar interpolaciones (o extrapolaciones), por otro lado se definen como *funciones de interpolación* aquellas que permiten realizar interpolaciones.[3]

Se conoce también que bajo ciertas condiciones el Método de Ajuste de Curvas por Mínimos Cuadrados, empleado para obtener curvas o superficies de Regresión Estadística, tiene como caso particular al polinomio obtenido por la Fórmula de Lagrange o por la Fórmula de Newton (Cheney y Kincaid, 1985), pero además se han demostrado (Alfonso-Roche, 1989; Legrá-Lobaina, 1999; Legrá-Lobaina y Trujillo-Codorniú, 1997a, 1997b) varias equivalencias entre los llamados Métodos de Estimación de la Geoestadística (que unen criterios topológicos y estadísticos) y algunos métodos numéricos de aproximación polinómica (donde existen métodos que mediante ciertos parámetros pueden ser o no interpoladores exactos) así como de análisis de tendencias; esto hace más compleja la situación, puesto que se entremezclan aún más los términos que analizamos.

En la actualidad se habla con mucha frecuencia de EVALUAR, principalmente refiriéndose a los recursos y reservas; las acepciones más conocidas de este verbo en el idioma español están relacionadas con los verbos: tasar, valorar, apreciar, justipreciar, calcular, cantear, ajustar, estimar y valuar. Como puede observarse, el uso del verbo evaluar puede describir la acción de obtener un valor de una variable Z en un punto (Xc,Yc), pero al mismo tiempo nos induce la idea de mezcla (imprecisa) de métodos cuantitativos (exactos y aproximados) y cualitativos. Entre los matemáticos este verbo se utiliza, específicamente, para referirse a la sustitución de las variables de las funciones o de los funcionales (que pueden estar bajo el efecto de otros operadores matemáticos) por valores específicos de estas variables.

Si consideramos la gran diversidad de problemas que las ciencias geológicas y mineras se plantea resolver a partir de datos puntuales sobre un fenómeno y las variadas formas que existen para resolverlos, en el sentido de obtener un valor de una variable Z en un punto (Xc,Yc), nos percatarnos de que el lenguaje utilizado en ocasiones ha sido inexacto (lo cual obstaculiza la imprescindible comunicación entre los geólogos mineros y los matemáticos) y además se puede enmascarar el hecho de que en todos los casos se ha tratado de modelar el comportamiento de Z sobre cierto dominio de R^2 a los cuales pertenecen los puntos de muestreo.

Entonces, aunque genéricamente podría utilizarse con toda justicia el verbo DETERMINAR, el que consideramos más adecuado (y esto tiene un importante significado metodológico) es MODELAR. Debería expresarse, por ejemplo: “el valor modelado de Z, interpolando por el Método de la Aproximación Polinómica Bidimensional, en el punto (4,1;6,23) es 98,6”. Nótese que de esta manera también se pueden describir con precisión los casos en que se utilicen, para la determinación de Z, métodos gráficos tales como los nomogramas e incluso métodos o criterios heurísticos.

La propuesta anterior considera que es posible precisar y emplear el verbo ESTIMAR para el caso en que se utilice un modelo o método estadístico y geoestadístico, CALCULAR para modelos y métodos del Análisis Numérico o Matemática Numérica, y EVALUAR en el caso de uso de funciones funcionales. Por su parte, los verbos INTERPOLAR y EXTRAPOLAR deberán ser empleados para precisar que la modelación de Z se realiza dentro o fuera de la frontera convexa de los datos. Si es necesario, debe señalarse que se trata de una interpolación exacta.

El último aspecto sobre el que se desea llamar la atención es el del origen y tipo de datos, y su relación con el modelo que se va a emplear. Sólo señalaremos que en ocasiones, y esto se ve agravado por el uso indiscriminado de las aplicaciones para computadoras, se seleccionan modelos (métodos) inadecuados para la cantidad, calidad y otras propiedades de los datos de entrada disponibles.

Partiendo de los argumentos planteados, pudiera concluirse que lo principal deberá ser el análisis de la situación real para la determinación del par DATO-MODELO (a cada modelo se le asocian MÉTODOS) a partir de los pasos siguientes:

1. Desde el punto de vista de la experiencia previa sobre la situación particular presentada, dada por la información que se tiene, es posible preguntarse ¿qué modelos son los indicados o necesarios para describir el comportamiento de la variable Z? Deberían indicarse varios modelos en escala de mayor a menor prioridad.
2. Según la experiencia previa, la situación particular y los modelos seleccionados, ¿cuáles, cuántos y dónde deben ser tomados los datos? y ¿qué análisis de laboratorio y gabinete son los más indicados o necesarios y cuál es la calidad con que deben y pueden realizarse considerando los factores técnicos y económicos?
3. Aplicación de los métodos matemáticos asociados con los modelos seleccionados para el procesamiento de los datos y la determinación de los valores de Z.
4. Evaluación de la eficiencia de los modelos (métodos), valorando la capacidad, velocidad y calidad de la respuesta ante cada situación posible.

Estos pasos deben constituir un sistema dinámico retroalimentado y estar automatizados, pues así se resume una concepción que, en síntesis, expresa que no se puede considerar satisfactoria la determinación de un valor de la variable Z en un punto dado, si antes no se ha estudiado la modelación (método) más adecuada.

MODELACIÓN DE SUPERFICIES TOPOGRÁFICAS MEDIANTE SPLINES BICÚBICOS

Para ilustrar este aspecto hemos tomado el caso particular de la modelación topográfica de los bloques (300 x 300 m^2) del yacimiento Punta Gorda de la empresa niquelera Comandante Ernesto Che Guevara de Moa.

Los datos disponibles son, generalmente, cotas medidas sobre redes cuadradas de 19 x 19 = 361 mediciones equidistantes. Los objetivos de la modelación son: determinar la cota para ciertos valores de las variables *x* e *y*; obtener las representaciones de la superficie y de isolíneas, y determinar el volumen aproximado desde el plano Z=0.

El modelo que utilizamos es el del Spline Bicúbico debido a las características de la red (rectangular y completa), no se precisa de red auxiliar explícita (*grid*) para densificar la red. El modelo tiene las características de continuidad de la superficie, y de las primeras y segundas derivadas de la función que lo describe (tiene relación con la “suavidad” de las representaciones gráficas), la curvatura de la superficie obtenida es pequeña, el método tiene la propiedad de ser un interpolador exacto y no es eficiente al realizar extrapolaciones, pero para este caso no son necesarias. El cálculo aproximado de los volúmenes se realiza analítica y explícitamente a partir de las ecuaciones que describen el modelo que se puede emplear en problemas que tengan un enunciado como el siguiente:

Sean n puntos del espacio R^3 de coordenadas cartesianas $P_l(x_l,y_l,z_l)$ donde n≥4 y llamemos $Q_l=(x_l,y_l)$ a sus proyecciones en el plano XY. Supongamos que los puntos Q_l forman una red rectangular con medida total y positiva sobre $I=[x_{min},x_{max}]x[y_{min},y_{max}]$, donde se presentan n_1 valores diferentes de x y n_2 valores diferentes de y (ordenadas tanto las x_i como las y_j de menor a mayor). Se cumple que: $n=n_1 \times n_2$ y a cada punto Q_l le corresponde uno y sólo un valor de la matriz $M_{n1 \times n2}$.

La extensión de la definición del spline cúbico natural a la interpolación espacial mediante el spline bicúbico se realiza iterativamente tal como propone Sánchez-Quintanilla (1985) o Legrá-Lobaina y Trujillo-Codorniú (1997 a, 1997 b). En el Anexo 1 se muestra el código de un programa en Lenguaje Pascal, donde se ilustra un algoritmo desarrollado para el spline bicúbico. Este spline obtenido de otra forma se ha aplicado a la modelación de algunas características de anomalías geofísicas representables por isolíneas y ha sido usado en la modelación de perfiles geológicos (Legrá-Lobaina, 1999). Otra aplicación importante de los splines cúbicos es la que se refiere a la modelación de la tendencia (trend) de un fenómeno geológico (Alfonso-Roche, 1989).

Queremos obtener el volumen del sólido limitado por el plano z=0 y la superficie z=F(x,y), que satisface $z_i=F(x_i,y_i)$, sobre la región I. En este caso se determina el Spline Bicúbico z=H(x,y) y se calcula el volumen total por:

$$V = \sum_{j=1}^{n2-1} \sum_{i=1}^{n1-1} V_{ij} \qquad \text{donde}$$

$$V_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} H_{ij}(x,y)\,dy\,dx$$

Para determinar las curvas de nivel para cada uno de los “parches” H_{ij} donde $x_i \le x \le x_{i+1}$ para i=1,…,n1–1; $y_j \le y \le y_{j+1}$, para j=1,…,n2-1 el spline tiene la expresión:

$$Z=H_{ij}(x,y) =$$

$$=\left[pa_{ji}+qa_{ji}(x-x_i)+ra_{ji}(x-x_i)^2+sa_{ji}(x-x_i)^3\right]+$$

$$+\left[pb_{ji}+qb_{ji}(x-x_i)+rb_{ji}(x-x_i)^2+sb_{ji}(x-x_i)^3\right](y-y_j)+$$

$$+\left[pc_{ji}+qc_{ji}(x-x_i)+rc_{ji}(x-x_i)^2+sc_{ji}(x-x_i)^3\right](y-y_j)^2+$$

$$+\left[pd_{ji}+qd_{ji}(x-x_i)+rd_{ji}(x-x_i)^2+sd_{ji}(x-x_i)^3\right](y-y_j)^3$$

Igualando Z=k y aplicando la fórmula de Cardano (Bronshtein y Semendaiev, 1973), se obtienen las funciones siguientes:

$y = y_i - t(x) + u(x) + v(x)$
$y = y_i - t(x) + e_1 u(x) + e_2 v(x)$
$y = y_i - t(x) + e_2 u(x) + e_1 v(x)$

donde

$e_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$ y $e_2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

$u(x) = \sqrt[3]{-q(x)+\sqrt{G(x)}}$ y $v(x) = \sqrt[3]{-q(x)-\sqrt{G(x)}}$

y además: $G(x) = \frac{q^2(x)}{2} + \frac{p^3(x)}{3}$, $t(x) = \frac{B(x)}{3A(x)}$,

$$q(x) = \frac{B^3(x)}{54A^3(x)} - \frac{B(x)C(x)}{6A^2(x)} + \frac{D(x)}{2A(x)}$$

y $p(x) = \frac{3A(x)C(x) - B^2(x)}{9A^2(x)}$

para

$$D(x) = \left[pa_{ji} + qa_{ji}(x-x_i) + ra_{ji}(x-x_i)^2 + sa_{ji}(x-x_i)^3\right] - k$$

$$C(x) = \left[pb_{ji} + qb_{ji}(x-x_i) + rb_{ji}(x-x_i)^2 + sb_{ji}(x-x_i)^3\right]$$

$$B(x) = \left[pc_{ji} + qc_{ji}(x-x_i) + rc_{ji}(x-x_i)^2 + sc_{ji}(x-x_i)^3\right]$$

$$A(x) = \left[pd_{ji} + qd_{ji}(x-x_i) + rd_{ji}(x-x_i)^2 + sd_{ji}(x-x_i)^3\right]$$

Para evitar el trabajo con números complejos se propone, según Bronshtein y Semendaiev (1973), el método combinado:

I. Si $A(x) \neq 0$, entonces

1. Si $G(x)>0$, entonces se toma una sola curva $y = y_i - t(x) + u(x) + v(x)$
2. Si $G(x) = 0$, entonces si:
   a. $p(x) = q(x) = 0$ se tiene una sola curva $y = y_i - t(x)$
   b. $p^3(x)/3 = -q^2(x)/2 \neq 0$ se tienen dos curvas:

   $y = y_i - t(x) + \sqrt[3]{-2q(x)}$; $y = y_i - t(x) - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-2q(x)}$
3. Si $G(x)<0$ se tienen tres curvas.

   Sea $R(x) = \pm\sqrt{|p(x)|}$ donde el signo de $R(x)$ es el mismo de $q(x)$. Nótese que $p(x)<0$

   Calculamos $\varphi(x) = \arccos\left[\frac{q(x)}{R^3(x)}\right]$ y se tiene:

   $y = y_i - t(x) - 2R(x)\cos\left(\frac{\varphi(x)}{3}\right)$

   $y = y_i - t(x) + 2R(x)\cos\left(\frac{\pi - \varphi(x)}{3}\right)$

   $y = y_i - t(x) + 2R(x)\cos\left(\frac{\pi + \varphi(x)}{3}\right)$

II. Si $A(x)=0$ y $B(x)\neq 0$, se calcula:

$G(x) = [C(x)]^2 - 4B(x)D(x)$

1. Si $G(x)=0$ entonces se tiene la curva

   $y = y_i - t(x) - \frac{C(x)}{2B(x)}$
2. Si $G(x)>0$ se tienen las curvas:

   $y = y_i - t(x) + \frac{-C(x)+\sqrt{G(x)}}{2B(x)}$; $y = y_i - t(x) + \frac{-C(x)-\sqrt{G(x)}}{2B(x)}$
3. Si $G(x)<0$, no será considerado este caso.

III. Si $A(x)=B(x)=0$ y $C(x)\neq 0$ tendremos la curva

$y = y_i - t(x) - \frac{D(x)}{C(x)}$

IV. Sea $A(x)=B(x)=C(x)=0$. La posible solución es $y = y_i - t(x) + D(x)$.

Estas formulaciones han sido aplicadas satisfactoriamente mediante el software TIERRA en el control topográfico de la Subdirección de Minas de la Empresa Comandante Ernesto Che Guevara, que en la actualidad explota el yacimiento Punta Gorda. Las satisfactorias velocidad de procesamiento y precisión del modelo del spline bicúbico pueden comprobarse corriendo el programa del Anexo 1 sobre una versión mayor o igual que la 5.0 del lenguaje Turbo Pascal(C) de Borland International, Inc. (EMPES, 1995).

CONCLUSIONES

- La definición del modelo más adecuado para la determinación de valores de una variable geológica o minera Z que es función de las variables X e Y del plano, no será satisfactoria si antes no se ha estudiado cuál es la modelación más adecuada.
- Los aspectos relacionados con la determinación de variables geológicas y mineras, y la modelación, han sido programados para ser aplicados mediante computadoras y se han obtenido resultados satisfactorios tanto en la velocidad del procesamiento de los datos como en la descripción del modelo de los yacimientos.

NOTAS

[1] Asumimos que cuando una ciencia (por ejemplo, la Geología) utiliza conceptos tomados de otra ciencia (la Matemática), la primera debe utilizarlos con el significado que se le reconoce en la segunda o, al menos, con un significado compatible.

[2] Puesto que interpolar y extrapolar hacen referencia a una propiedad del punto sobre el que se determina el valor de Z, en nuestra opinión debería expresarse, por ejemplo, que "el valor de Z en el punto P se interpoló" cuando además se quiere expresar que P estaba dentro o sobre la frontera de los datos. No debe pensarse que "se interpola cuando se determina Z a partir de los nodos de interpolación" porque estos nodos de interpolación son, en definitiva, los datos que también se utilizan para extrapolar.

[3] Por ejemplo: Polinomio de Interpolación. En realidad, esto es un abuso de lenguaje para significar que este polinomio se define (como una aproximación de una función dada por una tabla) con el fin de interpolar con cierta eficiencia. Nótese que, obviando la eficiencia, un polinomio de interpolación también permite extrapolar.

BIBLIOGRAFÍA

ALFONSO-ROCHE, JOSÉ R.: *Estadísticas en las Ciencias Geológicas*, t. 2, Ed. ISPJAE, Ciudad de La Habana, 1989.

BRONSHTEIN, I. Y K. SEMENDAIEV: *Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes*, Ed. MIR, Moscú, 1973.

CHENEY, W. Y D. KINCAID: *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole Publishing Company, USA, 1985.

ISAACSON, E. Y H. BISHOP: *Analysis of Numerical Methods*, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

LEGRÁ LOBAINA, A. A.: "Metodología para el pronóstico, planificación y control de yacimientos lateríticos", Tesis doctoral, Instituto Superior Politécnico José A. Echeverría, Ciudad de La Habana, 1999.

LEGRÁ LOBAINA, A. A.Y R. A. TRUJILLO-CODORNIÚ: “Algoritmo para la obtención del Spline K-Cúbico Natural”, Trabajo presentado en el evento COMPUMAT 97, Cienfuegos, Cuba, noviembre de 1997 a.

--------------------: “Modelación de mediciones geólogo-mineras sobre una red rectangular mediante spline cúbico natural”, *Minería y Geología*, 14(2):36-38, 1997 b.

MYERS, DONALD E.: *Interpolation and Estimation with spatially located data. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 11, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1991.

SÁNCHEZ-QUINTANILLA, ANA: “Interpolación en tres dimensiones mediante generación de funciones Bicubic Splines y obtención de isolíneas por ordenador”, *Boletín Geológico y Minero*, t. XCVI-II año, 1985.

EMPES: *Turbo Pascal 7: The Complete*, 2 t., Ciudad de La Habana,1995.

ANEXO

```
Program SplineBi;
uses crt;
const max = 12;
type vector = record
                  v : array[1..max] of real;   n : byte;
                end;
     matriz = record
                w : array[1..max] of vector;   m : byte;
              end;
var  ok                : boolean;
     i                 : byte;
     x,y,z,xx,yy       : vector;
     zz,r1,r2,r3,r4    : matriz;
     xc,yc,zc          : real;
function SplineCubicoPlano(x,y:vector;var r:matriz):boolean;
  var i          :  byte;
      ok         :  boolean;
      h,b,u,w,z  :  vector;
  begin
   { El valor de x . n debe ser igual al de y . n }
   { Los valores de x .v deben estar ordenados de menor a mayor }
   ok:=false;   h.n:=x.n; b.n:=x.n; u.n:=x.n; w.n:=x.n; z.n:=x.n;
   if x.n<2 then ok:=false else
   if x.n=2 then
     begin
      if x.v[1]<>x.v[2] then
        begin
         ok:=true;  r.m:=1; r.w[1].n:=6;    r.w[1].v[1]:=y.v[1];
         r.w[2].v[1]:=(y.v[2]-y.v[1])/(x.v[2]-x.v[1]);   r.w[3].v[1]:=0; r.w[4].v[1]:=0;
         r.w[5].v[1]:=x.v[1]; r.w[6].v[1]:=x.v[2];
        end;
     end
   else
     begin
      for i:=1 to x.n-1 do
        begin
         h.v[i]:=x.v[i+1]-x.v[i];
         if h.v[i]<>0 then b.v[i]:=(y.v[i+1]-y.v[i])/h.v[i]
         else begin   SplineCubicoPlano:=false; exit; end;
        end;
      u.v[2]:=2*(h.v[2]+h.v[1]); w.v[2]:=6*(b.v[2]-b.v[1]);
      for i:=3 to x.n-1 do
```

```
        begin
          if u.v[i-1]=0 then  begin  SplineCubicoPlano:=false; exit; end;
          u.v[i]:=2*(h.v[i]+h.v[i-1])-sqr(h.v[i-1])/u.v[i-1];
          w.v[i]:=6*(b.v[i]-b.v[i-1])-h.v[i-1]*w.v[i-1]/u.v[i-1];
        end;
      z.v[x.n]:=0;
      for i:=x.n-1 downto 2 do
        begin
          if u.v[i]=0 then begin SplineCubicoPlano:=false; exit; end;
          z.v[i]:=(w.v[i]-h.v[i]*z.v[i+1])/u.v[i];
        end;
      z.v[1]:=0;   r.m:=6;   for i:=1 to r.m do r.w[i].n:=x.n-1;
      for i:=1 to x.n-1 do
        begin
          r.w[1].v[i]:=y.v[i];
          r.w[2].v[i]:=-h.v[i]*z.v[i+1]/6-h.v[i]*z.v[i]/3+(y.v[i+1]-y.v[i])/h.v[i];
          r.w[3].v[i]:=z.v[i]/2;  r.w[4].v[i]:=(z.v[i+1]-z.v[i])/6/h.v[i];
          r.w[5].v[i]:=x.v[i]; r.w[6].v[i]:=x.v[i+1];
        end;
      ok:=true;
    end;
   SplineCubicoPlano:=ok;
  end;
function CreaSplineBicubico(xx,yy:vector;zz:matriz;var r1,r2,r3,r4:matriz):boolean;
  var  i,j              : byte;
       x,y,x1,y1        : vector;
       r,a,b,c,d,e,f    : matriz;
       ok               : boolean;
       s                : string;
       Arch             : file of matriz;
  begin
   x.n:=yy.n; y.n:=yy.n;
   for i:=1 to xx.n do
     begin
      for j:=1 to yy.n do begin  x.v[j]:=yy.v[j]; y.v[j]:=zz.w[j].v[i]; end;
      ok:=SplineCubicoPlano(x,y,r);
      if ok then
        begin
          str(i,s); s:='Col'+s+'.spl';
          assign(Arch,s); rewrite(Arch); write(Arch,r); close(arch);
        end
      else
        begin CreaSplineBicubico:=false; exit; end;
     end;
   a.m:=yy.n-1; for i:=1 to a.m do a.w[i].n:=xx.n;
   b.m:=yy.n-1; for i:=1 to b.m do b.w[i].n:=xx.n;
   c.m:=yy.n-1; for i:=1 to c.m do c.w[i].n:=xx.n;
   d.m:=yy.n-1; for i:=1 to d.m do d.w[i].n:=xx.n;
   for i:=1 to xx.n do
     begin
      str(i,s); s:='Col'+s+'.spl'; assign(Arch,s); reset(Arch);
read(Arch,e); close(arch);
      for j:=1 to e.w[1].n do
        begin
          a.w[j].v[i]:=e.w[1].v[j]; b.w[j].v[i]:=e.w[2].v[j];
          c.w[j].v[i]:=e.w[3].v[j]; d.w[j].v[i]:=e.w[4].v[j];
        end;
     end;
```

```
  x1.n:=xx.n; y1.n:=xx.n;
  for j:=1 to yy.n-1 do
    begin
      for i:=1 to xx.n do begin x1.v[i]:=xx.v[i]; y1.v[i]:=a.w[j].v[i]; end;
      ok:=splinecubicoplano(x1,y1,f);
      if ok=false then begin CreaSplineBicubico:=false; exit; end;
      for i:=1 to f.w[1].n do
        begin
          r1.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[1].v[i]; r1.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[2].v[i];
          r1.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[3].v[i]; r1.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[4].v[i];
        end;
      for i:=1 to xx.n do  begin x1.v[i]:=xx.v[i]; y1.v[i]:=b.w[j].v[i]; end;
      ok:=splinecubicoplano(x1,y1,f);
      if ok=false then  begin CreaSplineBicubico:=false; exit; end;
      for i:=1 to f.w[1].n do
        begin
          r2.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[1].v[i]; r2.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[2].v[i];
          r2.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[3].v[i]; r2.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[4].v[i];
        end;
      for i:=1 to xx.n do  begin x1.v[i]:=xx.v[i]; y1.v[i]:=c.w[j].v[i]; end;
      ok:=splinecubicoplano(x1,y1,f);
      if ok=false then  begin CreaSplineBicubico:=false; exit; end;
      for i:=1 to f.w[1].n do
        begin
          r3.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[1].v[i]; r3.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[2].v[i];
          r3.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[3].v[i]; r3.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[4].v[i];
        end;
      for i:=1 to xx.n do begin x1.v[i]:=xx.v[i]; y1.v[i]:=d.w[j].v[i]; end;
      ok:=splinecubicoplano(x1,y1,f);
      if ok=false then begin CreaSplineBicubico:=false; exit; end;
      for i:=1 to f.w[1].n do
        begin
          r4.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[1].v[i]; r4.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[2].v[i];
          r4.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[3].v[i]; r4.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]:=f.w[4].v[i];
        end;
      ok:=true;
    end;
  CreaSplineBicubico:=ok;
 end;
function EstimaSplineBicubico(x,y:real;xx,yy:vector;r1,r2,r3,r4:matriz;
                              var z:real): boolean;
const CotaError = 0.0001;
var  i,j          : longint;
     a,b,c,d      : real;
     ok           : boolean;
begin
 ok:=false;
 for j:=1 to yy.n-1 do
   if (y>=yy.v[j]-CotaError) and (y<=yy.v[j+1]+CotaError) then
     begin
       for i:=1 to xx.n-1 do
         if (x>=xx.v[i]-CotaError) and (x<=xx.v[i+1]+CotaError) then
           begin
             a:=r1.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]+r1.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*(x-xx.v[i])+
                r1.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])+
                r1.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])*(x-xx.v[i]);
             b:=r2.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]+r2.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*(x-xx.v[i])+
                r2.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])+
```

```
            r2.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])*(x-xx.v[i]);
          c:=r3.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]+r3.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*(x-xx.v[i])+
            r3.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])+
            r3.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])*(x-xx.v[i]);
          d:=r4.w[1].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]+r4.w[2].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*(x-xx.v[i])+
            r4.w[3].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])+
            r4.w[4].v[(j-1)*(xx.n-1)+i]*sqr(x-xx.v[i])*(x-xx.v[i]);
          z:=a+b*(y-yy.v[j])+c*sqr(y-yy.v[j])+d*sqr(y-yy.v[j])*(y-yy.v[j]);
          ok:=true; break;
        end;
      break;
    end;
  EstimaSplineBicubico:=ok;
end;
begin  { Datos }
 x.n:=12;   y.n:=12;   z.n:=12;
  x.v[ 1]:=1; y.v[ 1]:=1; z.v[ 1]:=5; x.v[ 2]:=2; y.v[ 2]:=1; z.v[ 2]:=6;
  x.v[ 3]:=3; y.v[ 3]:=1; z.v[ 3]:=8; x.v[ 4]:=4; y.v[ 4]:=1; z.v[ 4]:=6;
  x.v[ 5]:=1; y.v[ 5]:=2; z.v[ 5]:=7; x.v[ 6]:=2; y.v[ 6]:=2; z.v[ 6]:=4;
  x.v[ 7]:=3; y.v[ 7]:=2; z.v[ 7]:=3; x.v[ 8]:=4; y.v[ 8]:=2; z.v[ 8]:=2;
  x.v[ 9]:=1; y.v[ 9]:=3; z.v[ 9]:=6; x.v[10]:=2; y.v[10]:=3; z.v[10]:=6;
  x.v[11]:=3; y.v[11]:=3; z.v[11]:=5; x.v[12]:=4; y.v[12]:=3; z.v[12]:=2;
  { Redefine la forma de los datos }
  xx.n:=4; yy.n:=3; zz.m:=3;
  xx.v[1]:=1; xx.v[2]:=2; xx.v[3]:=3; xx.v[4]:=4;
  yy.v[1]:=1; yy.v[2]:=2; yy.v[3]:=3;
  zz.w[1].n:=4; zz.w[2].n:=4; zz.w[3].n:=4;
  zz.w[1].v[1]:=5; zz.w[1].v[2]:=6; zz.w[1].v[3]:=8; zz.w[1].v[4]:=6;
  zz.w[2].v[1]:=7; zz.w[2].v[2]:=4; zz.w[2].v[3]:=3; zz.w[2].v[4]:=2;
  zz.w[3].v[1]:=6; zz.w[3].v[2]:=6; zz.w[3].v[3]:=5; zz.w[3].v[4]:=2;
  {Define dimensiones de matrices de Coeficientes del Spline}
  r1.m:=4; for i:=1 to 4 do  r1.w[i].n:=(4-1)*(3-1);
  r2.m:=4; for i:=1 to 4 do  r2.w[i].n:=(4-1)*(3-1);
  r3.m:=4; for i:=1 to 4 do  r3.w[i].n:=(4-1)*(3-1);
  r4.m:=4; for i:=1 to 4 do  r4.w[i].n:=(4-1)*(3-1);
  ok:=CreaSplineBicubico(xx,yy,zz,r1,r2,r3,r4);   clrscr;
  if ok then
    begin
      repeat write('Diga el valor de X (entre 1 y 4):'); readln(xc);
      until (xc<=4) and (xc>=1);
      repeat write('Diga el valor de Y (entre 1 y 3):'); readln(yc);
      until (yc<=3) and (yc>=1);
      ok:=EstimaSplineBiCubico(xc,yc,xx,yy,r1,r2,r3,r4,zc);
      if ok then
        begin  writeln('Valor interpolado:',zc:12:4);write('Oprima enter.');readln; end;
    end;
end.
```