

Modelación matemática del área de exposición y del volumen de las pilas de menas lateríticas expuestas a secado solar natural

Yoalbys Retirado Mediaceja
Aristides Alejandro Legrá Lobaina

Resumen

Las menas lateríticas cubanas se exponen, en forma de pilas, a la radiación solar y la convección del aire para reducirles el contenido de humedad mediante la implementación del proceso de secado solar natural. La confección de las pilas de minerales se basa en criterios empíricos y, en consecuencia, no se conoce el área de exposición de las mismas y el volumen de mineral expuesto al secado. En este artículo se establecen los modelos matemáticos que permiten calcular, de forma precisa, la longitud de la superficie lateral, la altura, el área de exposición y el volumen de las pilas de mineral, en función de las dimensiones de la superficie horizontal disponible para el secado y de dos propiedades del material: la granulometría y la humedad. Las ecuaciones matemáticas establecidas caracterizan a las pilas con simetría axial y secciones transversales semi-elípticas, hiperbólicas, parabólicas y triangulares. Se aplicaron los modelos obtenidos a un caso de estudio para una superficie horizontal disponible de 40 m de largo y 5 m de ancho, considerando los valores medios de los ángulos de reposo maximal y tangencial de las menas lateríticas cubanas.

Palabras clave

Modelación matemática; menas lateríticas; secado solar natural.

Mathematical modeling for calculating exposure area and volume of lateritic stockpiles exposed to solar drying

Abstract

Laterite ore in Cuba is stockpiled and exposed to solar radiation and convection of air so as to reduce moisture content through the natural solar drying process. The stockpiles are formed based on empirical criteria so both the area of exposure of the stockpiles and the volume of ore subjected to drying are unknown. This article presents mathematical models that are used to calculate accurately the length of lateral surface area, height, area of exposure and volume of ore stockpiles according to the dimension of the horizontal surface area available for drying as well as two properties of the material: particle size and moisture. The stockpiles with axial symmetry, semi-elliptical, hyperbolic, parabolic and triangular cross sections are characterized with the established mathematical equations. The models obtained were applied to a case study of an available horizontal surface area of 40 meters (length) and 5 meters (width) considering mean values of maximal and tangential angles of repose of Cuba's laterite ore bodies.

Key words

Mathematical models; lateritic ore; natural solar drying.

1. INTRODUCCIÓN

Durante el secado solar natural (secado directo al sol) los materiales se exponen a la radiación del sol colocándolos sobre el suelo o en dispositivos específicos (Corvalan *et al.* 1995; Anwar & Tiwari 2001), siendo este uno de los más antiguos usos de la energía solar y el proceso más utilizado en países en vías de desarrollo (Berruta 2004; Tiwari *et al.* 2004; Tiwari & Sarkar 2006). Durante el secado natural el material está expuesto directamente al sol y al aire como únicas fuentes de energía (Montero 2005).

Los parámetros fundamentales del secado solar son la velocidad y tiempo de secado, debido a que de estos depende, en gran medida, el diseño de las instalaciones y tecnologías de secado a utilizar (Torres-Reyes *et al.* 2002; Bennamoun & Belhamri 2003; Bahansawy & Shehna 2004; Hernández & Quinto 2005; Mohamed *et al.* 2005).

Diversos investigadores coinciden en que la velocidad y el tiempo de secado de los materiales expuestos al sol en pilas dependen de diversos parámetros, los que deben ser considerados en la modelación matemática del proceso (Ivanova y Andonov, 2001; Adsten *et al.*, 2002; Chemkhi *et al.*, 2004; Prasad y Vijay, 2005). Dos de los parámetros más importantes son el área de exposición y el volumen de las pilas; el primero es donde se lleva a cabo la evaporación de la humedad del material como consecuencia de la incidencia de la radiación solar y la convección del aire; y el segundo, permite conocer la cantidad de material (en m³) sometida al proceso.

En la literatura clásica relacionada con la temática de secado se establecen los modelos generales del proceso (Lewis 1921; Philip & De Vries 1957; Luikov 1966; Berger & Pei 1973; Whitaker 1977; Whitaker & Chou 1983; Kowalski & Strumillo 1997, 2001); sin embargo, no se reportan recomendaciones específicas para el cálculo del área de exposición y el volumen de las pilas en función de las propiedades (ángulos de reposo maximal y tangencial) del material objeto de secado.

En las investigaciones que abordan la modelación matemática del proceso de secado solar (Sogari & Saravia, 2003; Celma *et al.* 2004; Jain 2005; Ribeiro 2005; Sacilik *et al.* 2005; Fayett 2008; Hernández *et al.* 2008; Montes *et al.* 2008; Morsetto *et al.* 2008; Salinas *et al.* 2008; Ferreira & Costa, 2009) por lo general se calcula el área de exposición y el volumen para las geometrías más frecuentes, pero en función de la geometría del recipiente que contiene el material que se desea secar y no como una función de las propiedades del propio material.

En el caso particular de las menas lateríticas cubanas el secado solar natural se realiza almacenando el material a la intemperie en pilas de diversas configuraciones (Estenoz *et al.* 2005, 2007 a y b; Retirado *et al.* 2007, 2009, 2011; Vinardell 2011). Debido a esto, las ecuaciones clásicas que se emplean en el cálculo del área de exposición y del volumen para las geometrías cuadradas, rectangulares y cilíndricas no pueden ser aplicadas al mencionado proceso. Se requiere, entonces, establecer modelos matemáticos específicos que permitan calcular, con la debida precisión, el área de exposición y el volumen de las pilas de menas lateríticas, que adoptan formas geométricas distintas de las arriba mencionadas.

En investigaciones recientes Ricaurte & Legrá (2010) caracterizan, en función de los ángulos maximal y tangencial, la geometría de la sección transversal de las pilas que se forman al depositar menas lateríticas en una superficie plana. Por su parte Sierra (2010) determina los referidos ángulos en función de la granulometría y la humedad de las menas.

El presente trabajo tiene como objetivo establecer, mediante la modelación matemática, las ecuaciones específicas que permitan calcular el área de exposición y el volumen de las pilas de menas lateríticas expuestas a secado solar natural, con fines de optimización del proceso de secado.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 Ángulo de reposo de las pilas de menas lateríticas

El ángulo de reposo caracteriza el grado de intermovilidad o de fluidez de las partículas que conforman los minerales lateríticos. Es el ángulo que la superficie lateral de la pila mineral forma con una superficie horizontal plana (Oriol & Aguilar 1995). Según Sierra (2010), se obtiene introduciendo una muestra de menas lateríticas sin apilar dentro un cilindro hueco colocado sobre una superficie horizontal, luego se levanta el cilindro verticalmente y las partículas de mineral se distribuyen por la generatriz de un sólido en revolución formando una pila. La tangente a la generatriz con respecto al plano horizontal para cada pila obtenida, constituye el ángulo del talud natural del mineral (Figura 1).

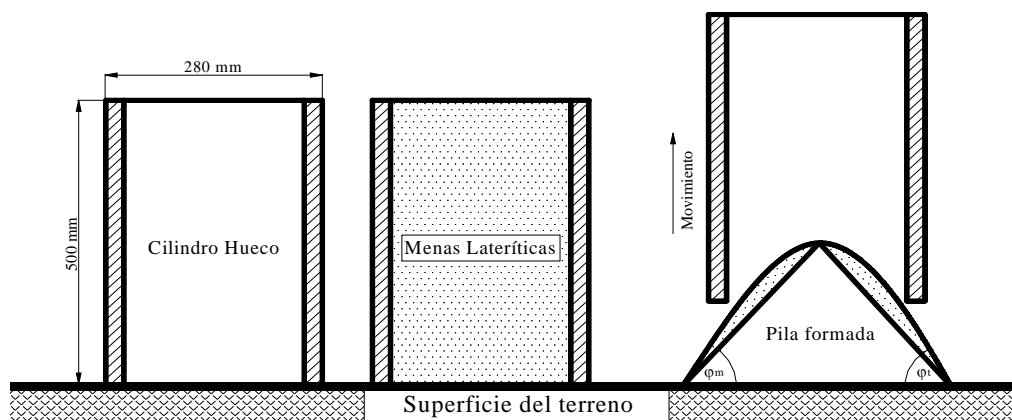


Figura 1. Procedimiento de formación de la pila de menas lateríticas para la medición de los ángulos de reposo ϕ_m y ϕ_t (Fuente: Sierra, 2010).

El ángulo de reposo de las pilas de menas puede ser medido de dos formas (Ricaurte & Legrá 2010):

1. Tomando como lados la superficie horizontal y la línea que une el punto más alto de la pila de minerales. A este ángulo se le denomina *ángulo de reposo maximal* (ϕ_m).
2. Tomando como lados la superficie horizontal y la línea tangente a la superficie lateral en la dirección del punto más alto de la pila de minerales. A este ángulo se le denomina *ángulo de reposo tangencial* (ϕ_t).

Para calcular los ángulos φ_m y φ_t en este trabajo se emplearon las ecuaciones empíricas (24 y 25) obtenidas en estudios experimentales realizados con menas lateríticas cubanas (Sierra 2010).

2.1.1 Geometría de la sección transversal de las pilas

La geometría de la sección transversal que adquiere una pila de menas lateríticas al ser depositada depende de los ángulos de reposo maximal y tangencial. Según Ricaurte y Legrá (2010) obedece a las condiciones siguientes:

Si $\varphi_m < \varphi_t$ y $\varphi_t \approx 90^\circ$	sección transversal semi-elíptica
Si $\varphi_m \gg \varphi_t$ y se asume que $\varphi_m - \varphi_t > 60^\circ$	sección transversal hiperbólica
Si $\varphi_m > \varphi_t$ pero $\varphi_m - \varphi_t \leq 60^\circ$	sección transversal parabólica
Si $\varphi_m = \varphi_t$	sección transversal triangular

Donde:

φ_m : ángulo de reposo maximal de la pila; grados sexagesimales.

φ_t : ángulo de reposo tangencial de la pila; grados sexagesimales.

3. MODELOS PARA EL CÁLCULO DEL ÁREA Y EL VOLUMEN

Para obtener el área de exposición y el volumen de una pila de menas lateríticas se tienen en cuenta las áreas laterales y frontales de la pila. De forma general se puede establecer la expresión 1 para el cálculo del área de una pila de mena formada simétricamente.

$$A = 2 \cdot A_{SL} + A_{SF} \quad (1)$$

Siendo:

$$A_{SL} = 2 \cdot L_{SL} \cdot \int_0^{bo/2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2)$$

$$A_{SF} = 2\pi \cdot \int_0^{bo/2} x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3)$$

Donde:

A : área de exposición de la pila; m^2 .

A_{SL} : área de la superficie lateral de la pila; m^2 .

L_{SL} : longitud de la superficie lateral de la pila; m .

b_o : ancho de la base de la pila; m .

$f(x)$: función que caracteriza la generatriz de la superficie lateral; m .

A_{SF} : área de la superficie frontal de la pila; m^2 .

Luego el área de exposición de la pila (A) se obtiene sumando las dos áreas anteriores (A_{SL} y A_{SF}) y resulta:

$$A = 2 \cdot L_{SL} \cdot \int_0^{b_o/2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx + 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (4)$$

Después de algunas transformaciones la ecuación 4 puede ser escrita de la siguiente forma:

$$A = 2 \cdot \int_0^{b_o/2} [L_{SL} + \pi \cdot x] \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (5)$$

El volumen de las pilas de menas lateríticas se calcula por la ecuación 6, mientras que los volúmenes de la superficie lateral y las frontales se determinan por las expresiones 7 y 8 (Stewart 2009).

$$V = V_{SL} + V_{SF} \quad (6)$$

Siendo:

$$V_{SL} = A_{STSL} \cdot L_{SL} \quad (7)$$

$$V_{SF} = 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot f(x) dx \quad (8)$$

Donde:

V : volumen de la pila; m^3 .

V_{SL} : volumen de la superficie lateral de la pila; m^3 .

V_{SF} : volumen de la superficie frontal de la pila; m^3 .

A_{STSL} : área de la sección transversal de la superficie lateral; m^2 .

3.1 Modelos para la sección transversal semi-elíptica

Las ecuaciones 4 y 5 dependen de la función $f(x)$ que para el caso de estudio (Figura 2) esta curva puede representarse por la ecuación 9 (Swokowski 2002; Stewart 2009).

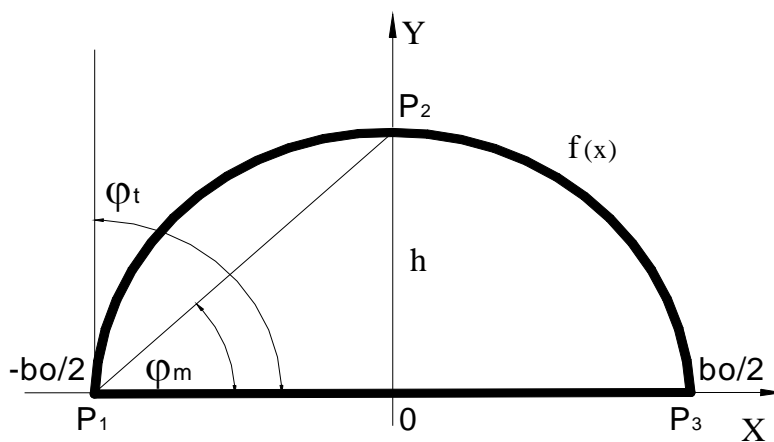


Figura 2. Vista frontal de una pila de sección transversal semi-elíptica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Ricaurte y Legrá (2010) dedujeron que en pilas de sección transversal semi-elíptica (Figura 2) se cumple que $a = -b_0/2$ y $h = b = (b_0/2) \cdot \tan(\varphi_m)$, y por tanto:

$$y = f(x) = \left[\left(\frac{b_0}{2} \right)^2 - x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \tan(\varphi_m) \quad (10)$$

Derivando la función anterior respecto a x resulta:

$$y' = f'(x) = \frac{-x \cdot \tan(\varphi_m)}{\left[\left(\frac{b_0}{2} \right)^2 - x^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Luego se sustituye la ecuación 11 en el modelo general (ecuación 5) y se obtiene el modelo particular para el cálculo del área de exposición de la pila para la sección transversal considerada.

$$A = 2 \cdot \int_0^{b_0/2} [L_{SL} + \pi \cdot x] \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{-x \cdot \tan(\varphi_m)}{\sqrt{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2 - x^2}} \right]^2} dx \quad (12)$$

Para establecer el modelo que permite calcular del volumen de la pila se sustituyen las ecuaciones 14 y 15 en la 6 y resulta:

$$V = A_{STSL} \cdot L_{SL} + 2\pi \cdot \int_0^{b_0/2} x \cdot f(x) dx \quad (13)$$

El área de la sección transversal de la superficie lateral (A_{STSL}) se calcula por la ecuación 14 (Ricaurte & Legrá 2010).

$$A_{STSL} = b_o^2 \cdot K_f \quad (14)$$

Donde:

K_f : factor de forma; adimensional.

El factor de forma depende del tipo de geometría de la sección transversal de la pila. Sus expresiones de cálculo fueron deducidas por Ricaurte & Legrá (2010), siendo para este caso particular:

$$K_f = \frac{\pi}{8} \cdot \tan(\varphi_m) \quad (15)$$

Luego el modelo general para la determinación del volumen de la pila se obtiene sustituyendo las ecuaciones 14 y 15 en la 13 y se obtiene:

$$V = b_o^2 \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \tan(\varphi_m) \cdot L_{SL} + 2\pi \cdot \int_0^{b_0/2} x \cdot f(x) dx \quad (16)$$

3.2 Modelos para la sección transversal hiperbólica

La ecuación correspondiente a la hipérbola, representada en la Figura 3, viene dada por la expresión 17 (Swokowski 2002; Stewart 2009).

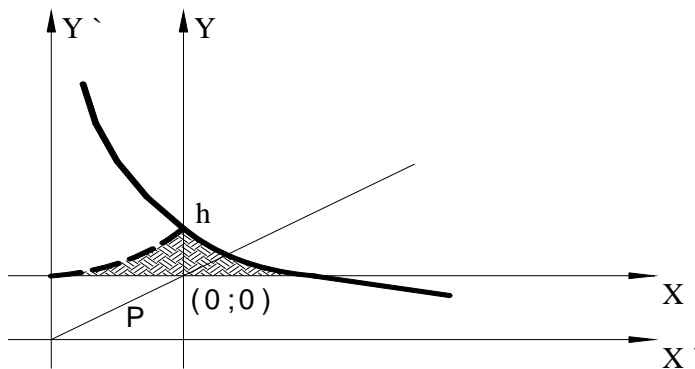


Figura 3. Vista frontal de una pila de sección transversal hiperbólica.

$$(x + x_0)(y + y_0) = P \tag{17}$$

Despejando la variable y en la ecuación 17 se obtiene:

$$y = f(x) = \frac{P}{(x + x_0)} - y_0 \tag{18}$$

Siendo:

$$y_0 = \frac{\frac{b_0}{2} \cdot \tan(\varphi_m) \cdot \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \tag{19}$$

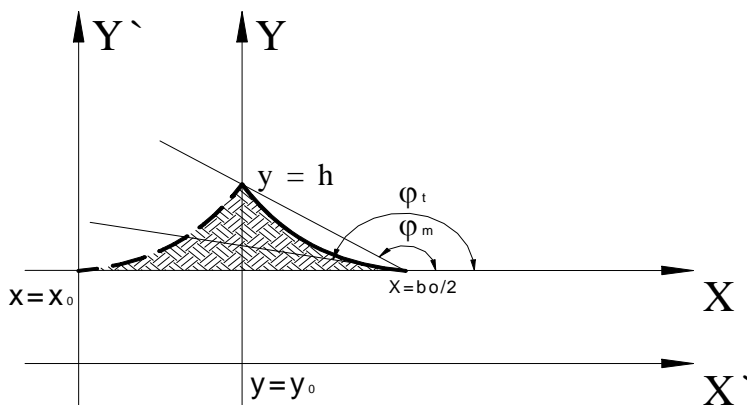


Figura 4. Ángulos φ_m y φ_t para la sección transversal hiperbólica.

Derivando la ecuación 18 respecto a x resulta:

$$y' = f'(x) = -\frac{P}{(x + x_o)^2} \quad (20)$$

Siendo:

$$P = \left[\frac{\frac{b_o}{2} \cdot \tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right]^2 \cdot \tan(\varphi_t) \quad (21)$$

$$x_o = \frac{\frac{b_o}{2} \cdot \tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \quad (22)$$

Luego se sustituyen las ecuaciones 21 y 22 en la 20 y se obtiene el valor de la derivada de la función. Posteriormente se sustituye la expresión 20 en el modelo general (ecuación 5) y se obtiene el modelo particular para el cálculo del área de exposición de la pila de sección transversal hiperbólica (ecuación 23).

$$A = 2 \cdot \int_0^{b_o/2} [L_{SL} + \pi \cdot x] \cdot \sqrt{1 + \left[-\frac{P}{(x + x_o)^2} \right]^2} dx \quad (23)$$

El modelo para el cálculo del volumen de la pila (ecuación 24) se obtiene, en este caso, sustituyendo la ecuación 14 en la 13 y considerando la expresión particular del coeficiente de forma K_f que para esta geometría se determina por la ecuación 25.

$$V = b_o^2 \cdot K_f \cdot L_{SL} + 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot f(x) dx \quad (24)$$

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\tan^2(\varphi_m) \cdot \tan(\varphi_t)}{[\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)]^2} \cdot \ln \left[\frac{\tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_t)} \right] - \frac{\tan(\varphi_m) \cdot \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right\} \quad (25)$$

3.3 Modelos para la sección transversal parabólica

La superficie lateral ABCD y su equivalente, tiene sección transversal parabólica, entre tanto, la superficie frontal que se forma en los extremos de la pila corresponde a un paraboloides elíptico. Para determinar el área de la superficie lateral, según la Figura 5b, se emplea la ecuación 2 y para la superficie frontal (Figura 5a) se utiliza la expresión 3, ambas son recomendadas por Stewart (2009).

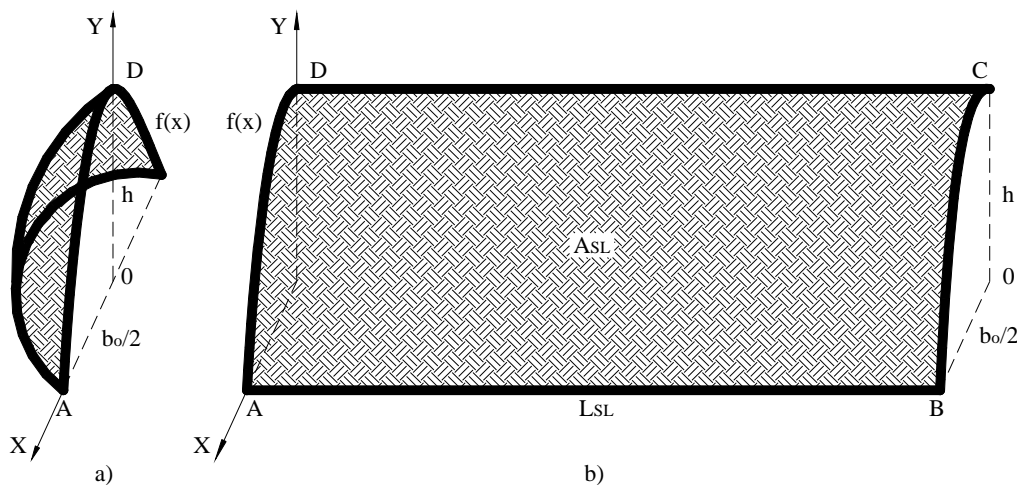


Figura 5. Superficies que se generan en una pila de menas lateríticas de sección transversal parabólica. a) superficie frontal; b) superficie lateral.

Las ecuaciones 2 y 3 dependen de la función $f(x)$ que para el caso de estudio (Figura 6) esta curva puede considerarse como una parábola de orden n cuya ecuación, según Swokowski (2002) y Stewart (2009) es:

$$y = f(x) = -ax^n + c \quad (26)$$

Siendo la derivada de la función:

$$y' = f'(x) = -n \cdot ax^{n-1} \quad (27)$$

Para determinar los coeficientes a , n y c , se emplean las expresiones 28, 29 y 30, obtenidas por Ricaurte & Legrá (2010).

$$a = \frac{\tan(\varphi_m)}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} \quad (28)$$

$$n = \frac{\tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m)} \quad (29)$$

$$c = \left(\frac{b_o}{2}\right) \cdot \tan(\varphi_m) \quad (30)$$

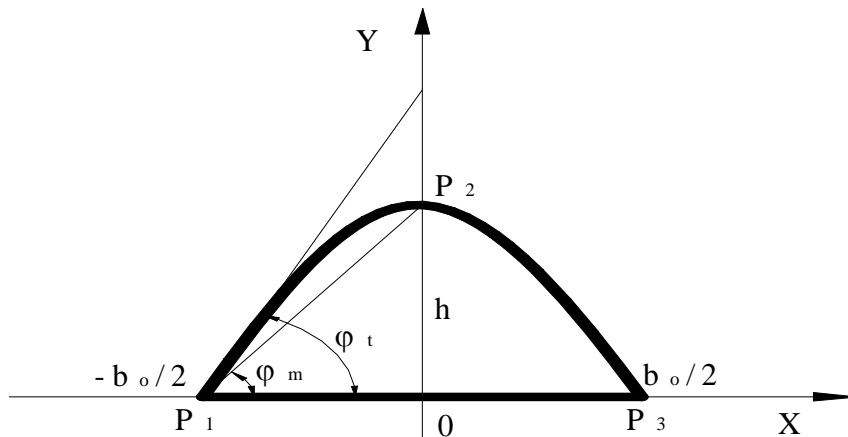


Figura 6. Vista frontal de una pila de sección transversal parabólica.

Debido a la necesidad de que la curva exprese la simetría axial de la sección transversal, el valor de n , según Ricaurte y Legrá (2010), debe aproximarse a la relación:

$$n = 2 \cdot \frac{i}{j} \quad (31)$$

siendo i y j números naturales

Luego, al sustituir las ecuaciones 26 y 27 en el modelo general (ecuación 5) se obtiene el modelo para el cálculo del área de exposición de una pila de sección transversal parabólica (ecuación 32).

$$A = 2 \cdot \int_0^{b_o/2} [L_{SL} + \pi \cdot x] \cdot \sqrt{1 + (-n \cdot ax^{n-1})^2} dx \quad (32)$$

El modelo para el cálculo del volumen de la pila (ecuación 33) se obtiene sustituyendo la ecuación 14 en la 13 y considerando la expresión particular del coeficiente de forma K_f que para esta geometría se determina por la ecuación 34.

$$V = b_o^2 \cdot K_f \cdot L_{SL} + 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot f(x) dx \quad (33)$$

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \tan(\varphi_m) \quad (34)$$

3.3.1 Coeficientes de la función según los ángulos de reposo

Los valores de los ángulos φ_m y φ_t , en función de la granulometría (G_m) y la humedad (u_m) de las menas lateríticas cubanas se calculan usando las ecuaciones empíricas 35 y 36 propuestas por Sierra (2010).

$$\varphi_m = 30,58 - 0,4592 \cdot G_m - 0,00496 \cdot G_m \cdot u_m + 0,00651 \cdot G_m^2 + 0,01109 \cdot u_m^2 \quad (35)$$

$$\varphi_t = 33,25 - 0,505 \cdot G_m - 0,0025 \cdot G_m \cdot u_m + 0,0062 \cdot G_m^2 + 0,008 \cdot u_m^2 \quad (36)$$

Verificándose que:

$$5 \leq G_m \leq 78 \quad y \quad 26 \leq u_m \leq 42 \quad (37)$$

Donde:

G_m : granulometría promedio de las menas lateríticas; mm.

u_m : humedad de las menas lateríticas; %.

Los valores medios de granulometría y humedad de las menas lateríticas cubanas son: $G_m = 15,72 \text{ mm}$ y $u_m = 36 \%$ (Sierra 2010), por tanto, los valores medios de los ángulos de reposo maximal y tangencial calculados con las ecuaciones 35 y 36 son $\varphi_m = 36,536$ y $\varphi_t = 35,795 \text{ grados}$, respectivamente. Sustituyendo los valores anteriores de φ_m y φ_t en las ecuaciones 28, 29 y 30 se obtiene que:

$$a = \frac{0,74093}{\left(\frac{b_o}{2} \right)^{-0,02672}} \quad (38)$$

$$n = 0,97328 \quad (39)$$

$$c = 0,74093 \cdot \left(\frac{b_o}{2} \right) \quad (40)$$

3.4 Modelos para la sección transversal triangular

En este caso se considera que las superficies laterales de la pila son rectangulares y las frontales son cónicas, como se muestra en la Figura 7. Las áreas de las superficies laterales y frontales se calculan usando las expresiones generales 2 y 3. Para ello deben considerarse las superficies que se generan.

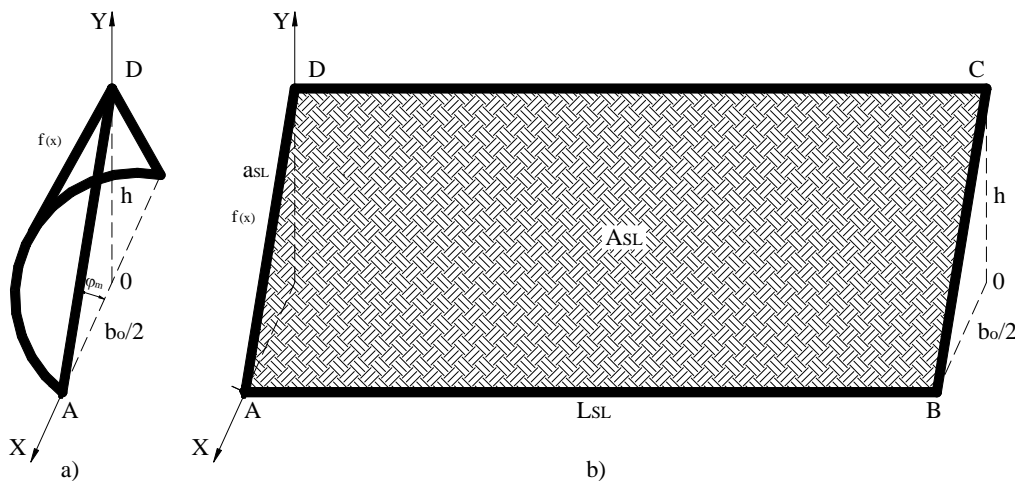


Figura 7. Superficies que se generan en una pila de menas lateríticas de sección transversal triangular ($\varphi_m = \varphi_t$). a) superficie frontal; b) superficie lateral.

La función $f(x)$, en este caso, es una línea recta cuya ecuación segmentaria característica es la siguiente:

$$y = f(x) = h \cdot \left(1 - \frac{2x}{b_o} \right) \quad (41)$$

Siendo la derivada de la función $f(x)$ (ecuación 41):

$$y' = f'(x) = -\frac{2 \cdot h}{b_o} \quad (42)$$

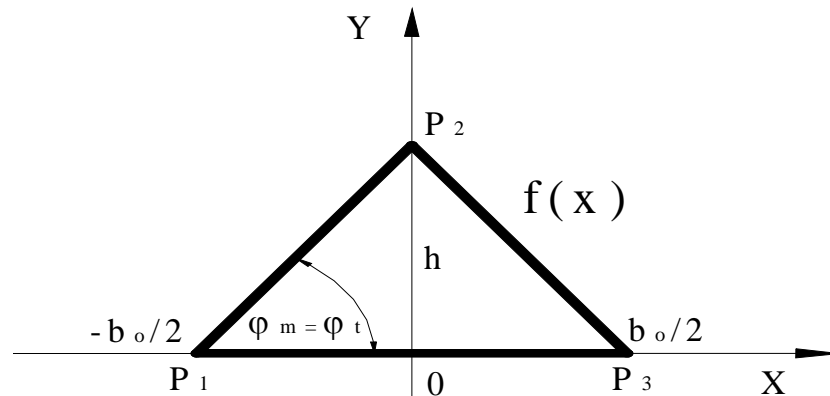


Figura 8. Vista frontal de una pila de sección transversal triangular.

Sustituyendo las ecuaciones 41 y 42 en la 5 se obtiene:

$$A = 2 \cdot \int_0^{b_o/2} [L_{SL} + \pi \cdot x] \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{2 \cdot h}{b_o}\right)^2} dx \quad (43)$$

Luego de realizar la integración correspondiente, la expresión de cálculo resultante para el área de exposición es:

$$A = 2 \cdot (a_{SL} \cdot L_{SL}) + \pi \cdot \frac{b_o}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_o^2}{4} + h^2} \quad (44)$$

Aplicando trigonometría, según la Figura 7, se obtiene que:

$$\cos(\varphi_m) = \frac{b_o}{2 \cdot a_{SL}} \quad (45)$$

Despejando el parámetro a_{SL} de la ecuación 45 resulta:

$$a_{SL} = \frac{b_o}{2 \cdot \cos(\varphi_m)} \quad (46)$$

Sustituyendo la expresión 46 en la ecuación 44 se obtiene:

$$A = \frac{b_o}{\cos(\varphi_m)} \cdot L_{SL} + \left(\pi \cdot \frac{b_o}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_o^2}{4} + h^2} \right) \quad (47)$$

La altura de la pila (h) puede ser calculada en función del ángulo de reposo maximal (φ_m) de las menas lateríticas y el ancho de la base de la pila (b_o), según la Figura 8, luego:

$$\tan(\varphi_m) = \frac{2 \cdot h}{b_o} \quad (48)$$

Donde:

h : altura de la pila; m.

Despejando el parámetro h en la ecuación 48 se obtiene:

$$h = \frac{b_o}{2} \cdot \tan(\varphi_m) \quad (49)$$

Sustituyendo la ecuación 49 en la 47 y después de realizar algunas transformaciones, resulta:

$$A = \frac{b_o}{\cos(\varphi_m)} \cdot L_{SL} + \left(\pi \cdot \frac{b_o}{2} \cdot \sqrt{\frac{b_o^2}{4} + \frac{b_o^2}{4} \cdot \tan^2(\varphi_m)} \right) \quad (50)$$

Simplificando el término que está dentro del radical, la expresión anterior (50) puede ser escrita de la forma siguiente:

$$A = \frac{b_o}{\cos(\varphi_m)} \cdot L_{SL} + \left(\pi \cdot \frac{b_o^2}{4} \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\varphi_m)} \right) \quad (51)$$

La ecuación 51 constituye el modelo matemático que permite calcular el área de exposición a la radiación solar y la convección del aire de una pila de sección transversal triangular.

El modelo para el cálculo del volumen de la pila (ecuación 52) se obtiene sustituyendo la ecuación 14 en la 13 y considerando la expresión particular del coeficiente de forma K_f que para esta geometría se determina por la ecuación 53.

$$V = b_o^2 \cdot K_f \cdot L_{SL} + 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot f(x) dx \quad (52)$$

$$K_f = \frac{1}{4} \cdot \tan(\varphi_m) \quad (53)$$

Como se ha indicado, cuando la geometría de la sección transversal es triangular, en los extremos de las pilas se forman dos semiconos. Sus volúmenes pueden ser calculados por la ecuación 54.

$$V_{SF} = 2\pi \cdot \int_0^{b_o/2} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b_o}{2}\right)^2 \cdot h \quad (54)$$

Sustituyendo la ecuación 53, el miembro derecho de la 54 y la 49 en la expresión 52, después de la simplificación correspondiente se obtiene el modelo particular para el cálculo del volumen (ecuación 55).

$$V = \frac{1}{4} b_o^2 \cdot \tan(\varphi_m) \cdot L_{SL} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b_o}{2}\right)^3 \cdot \tan(\varphi_m) \quad (55)$$

4. APLICACIÓN PRÁCTICA DE LOS MODELOS ESTABLECIDOS

Los modelos que en este trabajo se proponen tienen la finalidad de pronosticar, para el secado natural, las formas geométricas de las pilas y los valores de área y volumen de las mismas. En la práctica, los modelos propuestos permiten determinar estos parámetros sin necesidad de formar las pilas previamente, conociendo solo las dimensiones (largo y ancho) de la superficie horizontal disponible para el secado y la granulometría y humedad de la mena. A continuación se explica, a través de un caso de estudio, el procedimiento a seguir.

4.1 Caso de estudio

Se desea determinar las dimensiones, el área de exposición y el volumen que tendrá una pila de menas lateríticas expuesta a secado solar natural conociendo que se dispone de una superficie horizontal (L_{SHD}) de 40 m de largo y un ancho (b_o) de 5 m (Figura 9).



Figura 9. Esquema de la superficie horizontal disponible.

4.1.1 Solución

Sierra (2010) reporta que los valores medios de granulometría de las menas lateríticas cubanas son 15,72 mm y los de humedad 36 %. Por tanto, los valores medios de los ángulos de reposo maximal y tangencial calculados con las ecuaciones 35 y 36 son $\varphi_m = 36,536$ y $\varphi_t = 35,795$ grados.

Como la diferencia entre los valores medios de φ_m y φ_t es despreciable (0,741 grados), entonces puede asumirse que $\varphi_m \approx \varphi_t \approx 36,165$ grados (valor promedio); por tanto la sección transversal de la pila es triangular y son aplicables los modelos representados en las ecuaciones 51 y 55 para calcular el área de exposición y el volumen, respectivamente.

Longitud de la superficie lateral

De la Figura 9 se infiere que:

$$L_{SL} = L_{SHD} - b_o \quad (56)$$

Sustituyendo se obtiene: $L_{SL} = 40m - 5m = 35m$

Altura de la pila

Usando la ecuación 38 se obtiene que:

$$h = \frac{b_o}{2} \cdot \tan(\varphi_m) = \frac{5m}{2} \cdot \tan(36,165^\circ)$$

$$h = 1,827 m$$

Área de exposición de la pila

Utilizando el modelo representado por la ecuación 51 se obtiene que:

$$A = \frac{b_o}{\cos(\varphi_m)} \cdot L_{SL} + \left(\pi \cdot \frac{b_o^2}{4} \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\varphi_m)} \right)$$

Sustituyendo se obtiene:

$$A = \frac{5m}{\cos(36,165^\circ)} \cdot 35m + \left(\pi \cdot \frac{(5m)^2}{4} \right) \cdot \sqrt{1 + \tan^2(36,165^\circ)}$$

$$A = 241,087 m^2$$

Volumen de la pila

Utilizando el modelo representado por la ecuación 55 se obtiene que:

$$V = \frac{1}{4} b_o^2 \cdot \tan(\varphi_m) \cdot L_{SL} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b_o}{2} \right)^3 \cdot \tan(\varphi_m)$$

Sustituyendo se obtiene:

$$V = \frac{1}{4} \cdot (5m)^2 \cdot \tan(36,165^\circ) \cdot 35m + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{5m}{2} \right)^3 \cdot \tan(36,165^\circ)$$

$$V = 171,856 m^3$$

Luego, la pila de minerales puede ser dimensionada como se muestra a continuación (Figura 10):

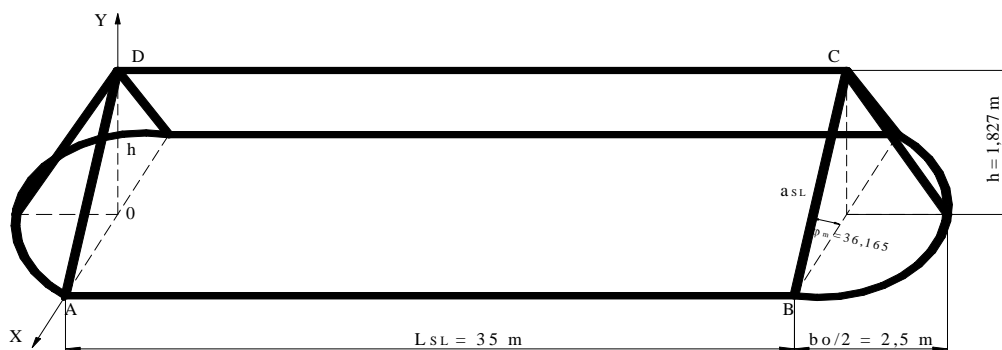


Figura 10. Esquema que contiene las dimensiones de la pila resultante.

Comportamiento del área de exposición y el volumen

Usando las dimensiones establecidas en el caso de estudio anterior ($L_{SHD} \times b_o = 40 \text{ m} \times 5 \text{ m}$) y las ecuaciones 49, 51 y 55 se calculó la altura, el área de exposición y el volumen de la pila para una progresión aritmética del ángulo de reposo maximal de 28 a 46 grados (Tabla 1).

Tabla 1. Valores de los parámetros calculados para la pila de lateritas.

L_{SHD} (m)	b_o (m)	L_{SL} (m)	φ_m (grados)	h (m)	A (m^2)	V (m^3)
40	5	35	28	1,329	220,438	125,012
			30	1,443	224,745	135,742
			32	1,562	229,509	146,915
			34	1,686	234,772	158,585
			36	1,816	240,582	170,819
			38	1,953	246,995	183,690
			40	2,098	254,078	197,283
			42	2,251	261,907	211,696
			44	2,414	270,574	227,045
			46	2,589	280,188	243,466

En la Figura 11 se aprecia que el área de exposición y el volumen de la pila muestran comportamientos crecientes, aunque en el caso de la primera el incremento que experimenta de un valor del ángulo maximal a otro es menos acentuado, de ello se infiere que para aumentar el volumen de mineral en una pila de sección transversal triangular, con ancho de la base constante, es necesario aumentar el ángulo de reposo del material.

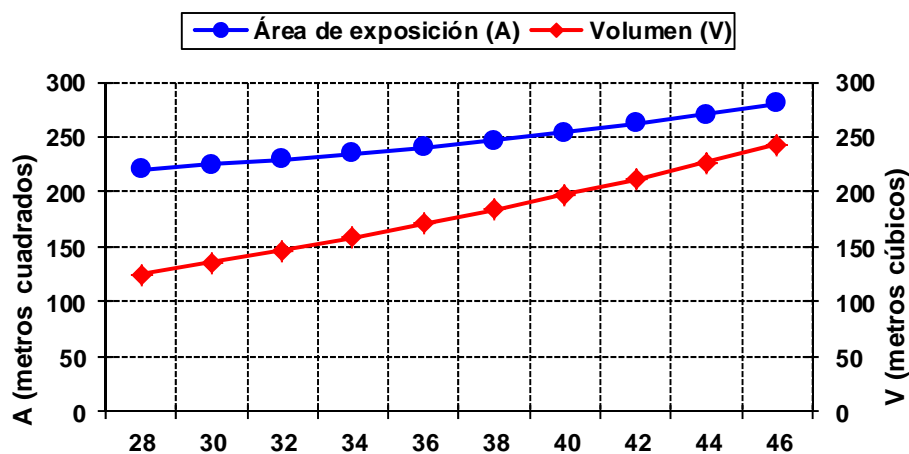


Figura 11. Comportamiento del área de exposición y el volumen de la pila respecto al ángulo de reposo maximal del mineral.

5. CONCLUSIONES

Mediante los modelos representados por las ecuaciones 12, 23, 32 y 51 es posible calcular, con adecuada precisión, el área de exposición de las pilas de menas expuestas a secado solar natural para las geometrías semi-elíptica, hiperbólica, parabólica y triangular, respectivamente. De igual modo las expresiones matemáticas 16, 24, 33 y 55 permiten calcular el volumen de estas pilas.

Para determinar el área de exposición y el volumen de las pilas en el secado solar mediante los modelos aquí establecidos basta conocer las dimensiones (largo y ancho) de la superficie horizontal disponible y los ángulos de reposo maximal y tangencial o la granulometría y la humedad de las menas lateríticas.

6. REFERENCIAS

- ADSTEN, M.; B. PERERS & E. WACKELGARD. 2002: The influence of climate and location on collector performance. *Renewable Energy*, 25(4): 499-509.
- ANWAR, S & G. TIWARI. 2001: Evaluation of convective heat transfer coefficient in crop drying under open sun drying. *Energy Conversion and Management*, 42(2): 627-637.
- BAHANSAWY, A. & M. SHENANA. 2004: A mathematical model of direct sun and solar drying of some fermented dairy products (Kishk). *Journal of Food Engineering*, 61(3): 309-319.
- BENAMOUN, L. & A. BELHAMRI. 2003: Design and simulation of a solar dryer for agriculture products. *Journal of Food Engineering*, 59(2): 259-266.
- BERGER, D. & T. PEI. 1973: Drying of hygroscopic capillary porous solids, a theoretical approach. *Journal of Heat and Mass Transfer*, 16: 293-302.
- BERRUTA, L. 2004: Participación campesina en el diseño y construcción de un secador solar para café. *Agrociencia*, 37 (1): 95-106.
- CELMA, A.; S. ROJAS & I. MONTERO. 2004: Simulación térmica del proceso de secado. *Alimentación, Equipos y Tecnología*, 192(1): 86-90.
- CHEMKHI, S.; F. ZAGROUBA & A. BELLAGI. 2004: Drying of agricultural crops by solar energy. *Desalination*, 168(15): 101-109.
- CORVALAN, R.; M. HORN; R. ROMAN & L. SARAVIA. *Ingeniería del secado solar*. CYTED-D, 1995.

- ESTENOZ, S.; A. ALDERÍ; N. BATISTA & A. DONATIÉN. 2005: Resultados en la industria minera del secado solar y la homogeneización de minerales en pilas a la intemperie. En: Memorias en CD del Evento Conferencia Internacional de Energía y Medio Ambiente CIEMA '05, 2005, Santiago de Cuba, Noviembre 8-11, ISBN 959-2007-198-5.
- ESTENOZ, S.; A. ALDERÍ; A. REYES; Y. LOVAINA & H. PINTO. 2007a: Uso racional de los recursos con la explotación de los depósitos de estabilización de la calidad en la empresa Ernesto Che Guevara. En: II Congreso Cubano de Minería. La Habana, Marzo 20-23, ISBN 978-959-7117-16-2.
- ESTENOZ, S.; A. ALDERÍ; N. BATISTA; A. DONATIÉN & N. PÉREZ. 2007b: Aplicación del secado solar y la homogeneización en la industria niquelífera Ernesto Che Guevara. En: II Congreso Cubano de Minería. La Habana, Marzo 20-23, ISBN 978-959-7117-16-2.
- FAYETT, D. 2008: *Optimización del proceso de secado solar para Lodos Residuales y cuantificación de metales pesados*. [Universidad Autónoma de Ciudad Juárez]. México (Tesis de Licenciatura) 46 p.
- FERREIRA, S & A. COSTA. 2009: Parámetros de transferencia de materia en el secado de frutas. *Información Tecnológica*, 20(2): 89-104.
- HERNÁNDEZ, J & P. QUINTO. 2005: Secado de medios porosos: una revisión a las teorías actualmente en uso. *Científica*, 9(2): 63-71.
- IVANOVA, D & K. ANDONOV. 2001: Analytical and experimental study of combined fruit and vegetable dryer. *Energy Conversion and Management*, 42(8): 975-983.
- JAIN, D. 2005: Modeling the system performance of multi-tray crop drying using an inclined multi-pass solar air heater with in-built thermal storage. *Journal of Food Engineering*, 71(1): 44-54.
- KOWALSKI, S & C. STRUMILLO. 1997: Moisture transport, thermodynamics, and boundary conditions in porous materials in presence of mechanical stresses. *Chemical Engineering Science*, 52(7):1141-1150.
- KOWALSKI, S & C. STRUMILLO. 2001: Thermomechanical approach to shrinking and cracking phenomena in drying. *Drying technology*, 19(5): 731-765.
- LEWIS, W. 1921: The rate of drying of solids materials. *Journal Industrial Engineering Chemical*, 13: 427-432.
- LUIKOV A. 1966: Application of irreversible thermodynamic methods to investigation of heat and mass transfer. *Journal of Heat and Mass*

- Transfer*, 9: 139-152.
- MOHAMED, L.; M. KOUHILA; A. JAMALI; S. LAHSASNI; N. KECHAOU & M. MAHROUZ. 2005: Single layer solar drying behaviour of Citrus aurantium leaves under forced convection. *Energy Conversion and Management*, 29(2): 1473-1483.
- MONTERO, I. 2005: Modelado y construcción de un secadero solar híbrido para residuos biomásicos. [Universidad de Extremadura]. Badajoz (Tesis Doctoral) 262 p.
- ORIO, G & AGUILAR, P. 1995: *Máquinas de transporte continuo*. T I. 3 ed. Pueblo y Educación. 235 p. ISBN 959-13-0393-9.
- PHILIP, J & A. DE VRIES. 1957: Moisture movement in porous materials under temperature gradients. *Transport Geophys Union*, 38(2): 222-232.
- PRASAD, J & V. VIJAY. 2005: Experimental studies on drying of Zingiber officinale, Curcuma longa 1. And Tinospora cordifolia in solar-biomass hybrid drier. *Renewable Energy*, 30(14): 2097-2109.
- RETIRADO, Y.; E. GÓNGORA; E. TORRES & A. ROJAS. 2007: (on line). Comportamiento de la humedad durante el secado solar del mineral laterítico. *Minería & Geología*, 23 (3). Consultado: 20 dic 2010 www.ismm.edu.cu/revistamg
- RETIRADO, Y.; E. GÓNGORA; E. TORRES & N. HERNÁNDEZ. 2009: (on line). Comportamiento de la adherencia en menas lateríticas sometidas a secado solar natural. *Minería & Geología*, 25 (1). Consultado: 20 dic 2010 www.ismm.edu.cu/revistamg
- RETIRADO, Y.; E. GÓNGORA; E. TORRES; M. LAMORÚ; B. LEYVA & D. GARCÍA. 2011: Transferencia de calor en el secado solar a la intemperie de menas lateríticas ferroniquelíferas. *Minería & Geología*, 27 (1). Consultado: 25 marzo 2011 www.ismm.edu.cu/revistamg
- RIBEIRO, P. 2005: *Concepção e modelação numérica de secador solar passivo para tratamento de efluente de processo de dessalinização*. [Universidad Técnica de Lisboa]. Lisboa (Tesis Doctoral). 253 p.
- RICAURTE, C & A. LEGRÁ. 2010: (on line). Contribución al cálculo del área de la sección de la carga en la banda transportadora de mineral laterítico. *Minería & Geología*, 26 (3). Consultado: 13 marzo 2011 www.ismm.edu.cu/revistamg
- SACILIK, K.; R. KESKIN & A. ELICIN. 2005: Mathematical modelling of solar tunnel drying of thin layer organic tomato. *Journal of Food Engineering*, 73(3): 231-238.

- SALINAS, C.; R. ANANÍAS & P. RUMINOT. 2008: Modelación fenomenológica de las curvas de secado por alta temperatura de Pino Radiata. *Maderas, Ciencia y tecnología*, 10(3): 207-217.
- SIERRA, R. 2010: *Optimización energética en el diseño de los transportadores de bandas utilizados en la industria del níquel*. [Instituto Superior Minero Metalúrgico]. Moa (Tesis Doctoral). 98 p.
- SOGARI, N & L. SARAVIA. 2003: Modelización de un secadero solar de maderas con circulación de aire por convección natural. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*, 7(1): 7-12.
- STEWART, J. 2009: *Cálculo con trascendente tempranas*. 4 ed. La Habana: Editorial Félix Varela. 4 t.
- SWOKOWSKI, C. 2002: *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 10 ed. Thomson Learning, Londres, 480 p.
- TIWARI, G & B. SARKAR. 2006: Experimental study of greenhouse Prawn drying under natural convection. *Agricultural Engineering International*, 8(16): 1-9.
- TIWARI, G.; S. KUMAR & O. PRAKASH. 2004: Evaluation of convective mass transfer coefficient during drying of Jaggery. *Journal of Food Engineering*, 63 (1): 219-227.
- TORRES-REYES, E.; J. NAVARRETE-GONZALEZ & B. IBARRA-SALAZAR. 2002: Thermo-dynamic method for designing dryers operated by flat-plate solar collectors. *Renewable Energy*, 26(4): 649-660.
- VINARDELL, J. 2011: *Implementación del secado solar natural de las menas lateríticas en las empresas níquelíferas cubanas*. [Instituto Superior Minero Metalúrgico]. Moa (Tesis de Maestría). 63 p.
- WHITAKER, S. 1977: Simultaneous heat, mass and momentum transfer and theory of drying. *Heat Transfer*, 13 (2): 119-203.
- WHITAKER, S & W. CHOU. 1983: Drying granular porous media (Theory and experiment). *Drying Technology*, 1(1): 3-33.

Yoalbys Retirado Mediaceja

Máster en Electromecánica. Profesor Asistente. Departamento de Ingeniería Mecánica. Instituto Superior Minero Metalúrgico, Holguín, Cuba.

yretirado@ismm.edu.cu

Arístides Alejandro Legrá Lovaina

Doctor en Ciencias Técnicas. Profesor Auxiliar. Centro de Estudio de Energía y Tecnología Avanzada de Moa. Instituto Superior Minero Metalúrgico, Holguín, Cuba.

alegra@ismm.edu.cu