

Cálculo del factor de visión entre superficies triangulares

View factor calculations between triangular surfaces

Yanan Camaraza-Medina^{1*}

¹Universidad de Guanajuato, Guanajuato, México.

*Autor para la correspondencia: ycamaraza1980@gmail.com

Resumen

En la evaluación del intercambio de energía radiante el factor de visión entre superficies es de vital importancia. Actualmente la literatura técnica disponible carece de una expresión analítica para estimar el factor de visión para combinaciones de superficies triangulares. Una solución analítica requiere la suma de múltiples integrales, dados los cambios en los contornos de integración, lo que se complejiza en contornos irregulares. Este trabajo tuvo como objetivo desarrollar una expresión para computar el factor de visión entre 32 configuraciones geométricas triangulares con arista común y ángulo incluido θ . Para establecer comparaciones, se calcularon 48 casos con diversas relaciones geométricas, utilizando la solución analítica (SA), la integración numérica mediante la regla múltiple de Simpson 1/3 (RMS), la solución gráfica de Sauer (SGS) y las raíces cruzadas de Bretzhtsov (RCB). A partir de ocho geometrías básicas, se computó el factor de visión para las restantes 24 combinaciones mediante la regla de la suma. En todos los casos, se obtuvieron valores de ajuste idénticos de RMS y SGS con respecto a AS, mientras que la RCB mostró la mejor correlación en todos los casos examinados. Dada la naturaleza práctica de la contribución y los valores razonables de los ajustes obtenidos, la propuesta constituye una herramienta adecuada para su aplicación en ingeniería térmica.

Palabras clave: factor de visión, raíz cruzada de Bretzhtsov, transferencia de calor por radiación, superficies triangulares.

Abstract

The view factor between surfaces is of paramount importance in the assessment of radiant energy exchange. Nowadays the available technical literature lacks the analytical expression for estimating the vision factor for combining triangular surfaces. An analytical solution requires the addition of multiple integrals, due to the changes in the integration contours, which becomes more complex for irregular contours. This research aims to develop

an expression to calculate the view factor between 32 triangular geometric configurations with common edge and included angle θ . To establish comparisons, 48 cases with various geometric relationships were calculated, using analytical solution (AS), numerical integration by means of Simpson's rule 1/3 (SMR), Sauer's graphical solution (SGS) and Bretzhtsov's cross roots (BCR). From eight basic geometries, the vision factor for the remaining 24 combinations was calculated using the addition rule. In all cases, identical fit values of RMS and SGS respect to AS were obtained, while RCB showed the best correlation in all cases examined. The results of this research reveal that the proposal constitutes a suitable tool to be used in thermal engineering given the practical nature of the contribution and reasonable values of obtained fits.

Keywords: view factor, Bretzhtsov's cross-root, radiative heat transfer, triangular surfaces.

1. INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones de ingeniería se requiere evaluar la transferencia de calor radiativo entre superficies. El factor de visión permite calcular la fracción de la energía radiante emitida por una superficie que alcanza a otra. Por lo tanto, la relación geométrica entre dos superficies y su influencia en el factor de visión ha sido objeto de investigación durante décadas. En trabajos previos se han propuesto diversas soluciones analíticas y numéricas para configuraciones diferentes (Howell y Mengüç, 2011; Nassar, 2020; Modest y Mazumder, 2021; Camaraza-Medina, 2021; Camaraza-Medina *et al.*, 2022). Una recopilación ampliada de factores de visión para más de 340 configuraciones diferentes es dada por Howell (2023).

Para la estimación de los factores de visión se conocen varios métodos en la literatura especializada, entre ellos los gráficos, analíticos y visuales. Además, mediante la regla de suma y el factor algebraico, los factores de visión de geometrías ya conocidas pueden utilizarse para determinar otros factores de visión de geometrías derivadas o más complejas (Narayanaswamy, 2015; Narayanaswamy y Meyappan, 2015; Gupta *et al.*, 2017; Howell *et al.*, 2020).

El incremento en la actualidad del procesamiento de datos en técnicas computacionales ha permitido el uso de programas comerciales basados en el Método de Elementos Finitos (MEF) para resolver diversos problemas de transferencia de calor, incluyendo los de radiación térmica. Las soluciones de los problemas de aristas y bordes, en general, se reducen a superficies con arista común y ángulo θ incluido, para las cuales ya son conocidas soluciones analíticas (Ehlert y Smith, 1993; Yi *et al.*, 2019; Zhou *et al.*, 2020; Reddy *et al.*, 2023). Sin embargo, en la ingeniería moderna, los generadores de mallas rara vez utilizan rectángulos o cuadrados (a menos que la geometría

global sea un cubo perfecto), siendo los elementos triangulares los más utilizados.

La solución analítica (SA) del factor de visión entre geometrías triangulares requiere la suma de múltiples integrales, dados los cambios en los contornos de integración, lo que dificulta la obtención de soluciones en configuraciones complejas. La integración numérica puede ser una solución parcial al problema, sin embargo, en la literatura especializada solo se dispone de pocas contribuciones al tema (Krishnaprakas, 1997).

Mediante integración numérica usando la regla múltiple de Simpson 1/3 (RMS) y cinco intervalos, fueron obtenidos los factores de visión para diversas geometrías triangulares con arista común y un ángulo $\theta = 90^\circ$, graficando los resultados de las más elementales y derivando las geometrías restantes mediante el uso de la regla de suma (Sauer, 1974). Las soluciones gráficas de Sauer (SGS) son útiles, pero requieren la interpretación de gráficos, lo que introduce errores de lectura e interpretación; por tanto, no son adecuados para la generación de mallas triangulares y el posterior cálculo de factores de visión, ya que carecen de una solución analítica o una aproximación numérica para su estimación.

El método de raíces cruzadas de Bretzhtsov (RCB) es una herramienta matemática que permite obtener ajustes razonables en las aproximaciones de funcionales complejos, además de generar una expresión analítica que incluye las condiciones de contorno o las incógnitas a tratar; por lo tanto, puede utilizarse para el cálculo de factores de visión, sin necesidad de usar ni interpretar grafos. El método en cuestión permite un ajuste por secciones o ramas, con nodos comunes para varias soluciones (Camaraza-Medina *et al.*, 2022). Su concepción matemática es similar a la del MEF, siendo adecuado para este trabajo.

Actualmente, en la literatura especializada no se dispone de una expresión analítica que permita calcular directamente el factor de visión para combinaciones de superficies triangulares. En la compilación ampliada de configuraciones de factores de visión disponible, para el caso de superficies triangulares finitas, se verifica que son usados solamente los resultados gráficos de Sauer (Howell, 2023). En otras fuentes consultadas, también se presentan los gráficos de Sauer para la determinación de los factores de visión (Thyageswaran, 2022; Camaraza-Medina, 2023). Lo anterior demuestra que actualmente no existen soluciones analíticas exactas ni aproximadas para la determinación de los factores de visión entre geometrías triangulares con borde común y ángulo θ incluido, lo cual constituye el objetivo principal de este trabajo.

Por lo tanto, en esta investigación se pretende desarrollar soluciones aproximadas que permitan computar el factor de visión en diversas geometrías triangulares, que no presentan una alta complejidad matemática y cuya correlación con respecto a la SA brinde un mejor ajuste que las SGS, constituyendo así un nuevo método de análisis para su aplicación al cálculo de factores de visión mediante el MEF, además de establecer nuevas expresiones que pueden incluirse en catálogos existentes.

Este trabajo presenta las soluciones analíticas exactas para ocho geometrías triangulares básicas y sus respectivas RCB. Para establecer comparaciones, se calcularon 48 ejemplos con diversas relaciones de aspecto para cada geometría, utilizando la solución analítica, la solución numérica de la integral cuádruple mediante la RMS con cinco intervalos, la solución gráfica de Sauer y los factores de visión calculados mediante las raíces cruzadas de Bretzhtsov (RCB). A partir de las ocho geometrías básicas, se obtiene el factor de visión para otras 24 geometrías triangulares mediante la regla de la suma. En todos los casos, se obtuvieron valores de ajuste idénticos de RMS y SGS con respecto a SA, mientras que la RCB mostró el mejor ajuste en todos los casos examinados, lo que confirma la validez de la hipótesis sobre su uso.

Dada la naturaleza práctica de la contribución y los valores razonables de los ajustes obtenidos, la propuesta constituye una herramienta adecuada para su aplicación en ingeniería térmica y prácticas afines que requieren cálculos de radiación térmica.

2. METODOLOGÍA

2.1 Consideraciones básicas sobre el factor de visión

El factor de visión es fundamental en el intercambio de energía radiante. El mismo depende de la configuración y la posición de las superficies receptoras y emisoras, por lo que su evaluación es compleja y, en muchos casos, se generan resultados erróneos. Entonces, el factor de visión F_{12} es la fracción de la radiación emitida por la superficie A_1 que es interceptada por la superficie A_2 , expresándose como la Ecuación (1), según Boeke y Wall (1976):

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1}^{A_2} \int_{A_2}^{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (1)$$

Donde: A_1 , A_2 son las superficies emisora y receptora, respectivamente. θ_1, θ_2 son los ángulos entre el vector normal al área dA_1, dA_2 y la línea que une el centro de las superficies A_1, A_2 ; respectivamente. r es la distancia entre los centros de las superficies A_1 y A_2 , (Figura 1).

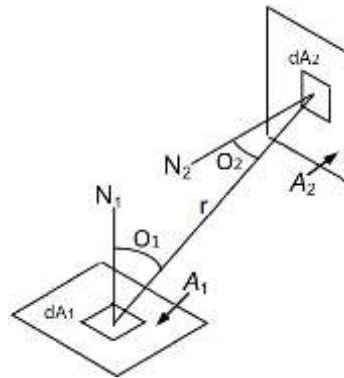


Figura 1. Geometría básica para la definición del factor de visión.

La Ecuación (1) incluye una doble integración, lo que en muchos casos puede ser un problema matemático muy laborioso. Por lo tanto, para calcular el factor de visión en cualquier geometría se requiere manejar un volumen considerable de integrales y resolver ecuaciones matemáticas complejas. Para simplificar el análisis, se utilizan aproximaciones numéricas que proporcionan ajustes adecuados, con un margen de error razonable, lo que permite su aplicación en la ingeniería práctica. Para configuraciones tridimensionales, se pueden implementar varios métodos para estimar el factor de visión, como la integración directa, la integración de contorno, las técnicas de suma y reciprocidad, la RMS, el método de Monte Carlo, el trazado de rayos, el MEF y los métodos matriciales (Francisco *et al.*, 2014; Bonnici *et al.*, 2019; Sönmez *et al.*, 2019; Lakhi y Safavinejad, 2021; Biehs *et al.*, 2021; Camaraza-Medina *et al.*, 2023).

En esta investigación, para obtener los factores de visión asociados a las 32 configuraciones estudiadas, se implementó el método de integración directa; y el método RCB para aproximar las funciones especiales generadas en la integración directa.

2.2. Solución matemática del factor de visión

El factor de visión entre dos rectángulos finitos del mismo ancho con arista común y ángulo incluido θ (Figura 2) está dado por (2):

$$f_{(1)} = F_{a-b} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos O_1 \cos O_2 dA_1 dA_2}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^D dx \int_0^W dz \int_0^D \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (2)$$

Para evaluar la Ecuación (2) son usadas las siguientes definiciones expresadas en (3):

$$X = W/D \quad ; \quad Y = L/D \quad ; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 - 2XY \cos \theta} \quad (3)$$

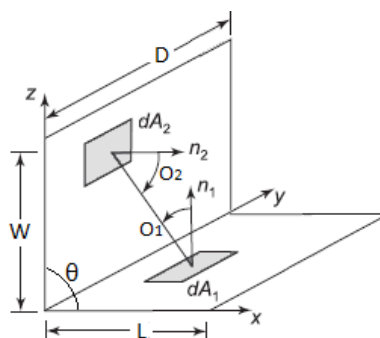


Figura 2. Rectángulos con arista común y ángulo θ incluido.

Evaluando la Ecuación (2), se obtiene la siguiente solución (Hamilton y Morgan, 1952) expresada en (4):

$$f_{(1)} = F_{a-b} = \frac{1}{\pi Y} \left\{ -\frac{\sin 2\theta}{4} \left\{ Y^2 \tan^{-1} \left(\frac{X}{Y} \csc \theta - \cot \theta \right) + X^2 \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \csc \theta - \cot \theta \right) + XY \sin \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (X^2 + Y^2) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{X^2 (1+X^2)}{R^2 (1+R^2)} \cos 2\theta \right\}^{\frac{X^2 \sin^2 \theta}{R^2 + Y^2 R^2}} \left(\frac{Y^2 + Y^2 R^2}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{\frac{Y^2 \sin^2 \theta}{(1+X^2)(1+Y^2) \cos^2 \theta + 1}} \right\} + \quad (4) \\ \left. + (\sin^3 \theta \cos \theta) \tan^{-1} \left(\frac{Y \sin \theta \sqrt{X^2 + \cot^2 \theta + 1}}{X^2 - YX \cos \theta + 1} \right) \sqrt{X^4 + X^2 (\cot^2 \theta + 1)} + X \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + \right. \\ \left. + Y \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) + -R \cot^{-1}(R) + \frac{\sin 2\theta}{2} \int_0^Y \sqrt{z^2 + \cot^2 \theta + 1} \tan^{-1} \left(\frac{X \sin \theta \sqrt{z^2 + \cot^2 \theta + 1}}{z^2 - ZX \cos \theta + 1} \right) dz \right\}$$

En las Ecuaciones (2) y (4) el ángulo θ es dado en radianes.

En una investigación previa (Hamilton y Morgan, 1952) se obtuvo una expresión similar a la Ecuación (4) para solucionar la integral cuádruple dada en la Ecuación (2), tabulando los valores de los factores de visión para los ángulos $\theta = (30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 135^\circ; 150^\circ)$. Estos valores fueron corregidos posteriormente por incumplir en algunos casos la regla de suma (Feingold, 1966; DeSutter *et al.* 2019; Yarahmadi *et al.* 2020; Thyageswaran, 2022; Camaraza-Medina, 2023).

La Ecuación (4) es muy compleja. La última integral carece de primitivas por lo cual no fue posible resolverla, por lo que su solución será obtenida mediante la RMS (con ocho intervalos). En cada intervalo de la integración numérica, la variable z se reemplaza por su fracción correspondiente de la longitud de la superficie emisora L (Tabla 1), obteniendo una solución (ω_n) para cada intervalo (Thyageswaran 2022).

Tabla 1. Definición de los valores z para la RMS, Ecuación (4)

0	Interv. 1	Interv. 2	Interv. 3	Interv. 4	Interv. 5	Interv. 6	Interv. 7	Interv. 8
0	0,125L	0,25L	0,375L	0,5L	0,625L	0,75L	0,875L	L
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9

Por tanto, la evaluación numérica de la última integral dada en la Ecuación (4) se puede calcular como se muestra en (5):

$$\int_0^Y \left\{ \sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta} \tan^{-1} \left(\frac{X \sqrt{1 + z^2 \sin^2 \theta}}{z^2 - zX \cos \theta + 1} \right) \right\} dz$$

$$\cong \frac{L}{24} (\omega_1 + \omega_9 + 2(\omega_3 + \omega_5 + \omega_7) + 4(\omega_2 + \omega_4 + \omega_6 + \omega_8)) \quad (5)$$

Si se cumple que $\theta = 90^\circ$, entonces la Ecuación (4) se simplifica a la siguiente relación, dada en (6):

$$f_{(1)} = F_{a-b} = \frac{1}{\pi Y} \left\{ X \tan^{-1} \left(\frac{1}{X} \right) + Y \tan^{-1} \left(\frac{1}{Y} \right) - R \cot^{-1}(R) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \ln \left\{ \left(\frac{X^2 + X^2 R^2}{R^2 + X^2 R^2} \right)^{X^2} \left(\frac{Y^2 + Y^2 R^2}{R^2 + Y^2 R^2} \right)^{Y^2} \left(\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+R^2} \right) \right\} \right\} \quad (6)$$

En la Ecuación (6), se utilizan las siguientes definiciones dadas en (7):

$$X = W/D \quad ; \quad Y = L/D \quad ; \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (7)$$

En la Figura 3 son dadas de forma gráfica las soluciones de la Ecuación (4) para valores de $\theta = (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ)$, en los intervalos $0.1 \leq Y \leq 10$ y $0.1 \leq X \leq 10$. Para valores de ángulos $\theta \neq (30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ)$ el factor de visión puede ser obtenido mediante la interpolación.

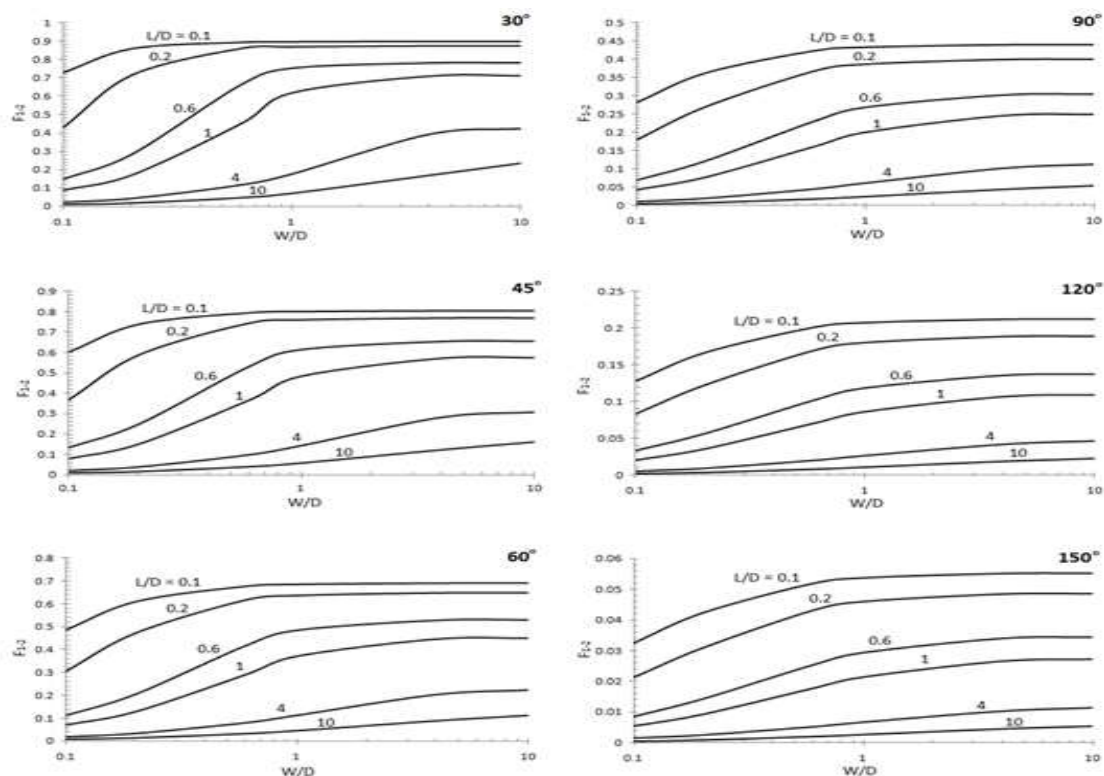


Figura 3. Valores F_{a-b} obtenidos con la Ecuación (4) para diversos valores de θ .

2.3. Generado de mallas triangulares para elementos de superficie

En la ingeniería moderna, los generadores de mallas rara vez utilizan rectángulos o cuadrados, a menos que la geometría global sea un cubo perfecto. Uno de los elementos más utilizados son los triangulares. La formulación de este tipo de geometrías requiere un tratamiento matemático que incluye varias sumas de la integral cuádruple, debido a la variación de los contornos de proyección en los ejes de coordenadas. Sobre las superficies rectangulares de la Figura 2 se pueden extender líneas diagonales, subdividiendo el dominio plano rectangular en elementos triangulares (Figura 4), para la posterior generación de mallas e implementación del MEF para la determinación de los factores de visión en condiciones de borde complejas.

En la Figura 4 las superficies emisora y receptora A_a y A_b se dividen en cuatro superficies triangulares, siendo posibles $n^{n-1} = 4^{4-1} = 64$ combinaciones. La reciprocidad de los factores de visión establece que $A_a F_{a-b} = A_b F_{b-a}$, por esta razón solo serán evaluadas 32 combinaciones. En la Figura 5 son dadas las geometrías básicas de los casos 1 al 8, porque estos constituyen la base del estudio realizado, ya que a partir de ellos se pueden generar las combinaciones restantes mediante la regla de sumas. En la Figura 6 son proporcionadas las geometrías básicas para los casos del 9 al 32.

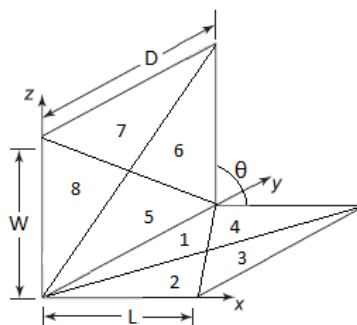


Figura 4. Descomposición de superficies rectangulares en elementos triangulares.

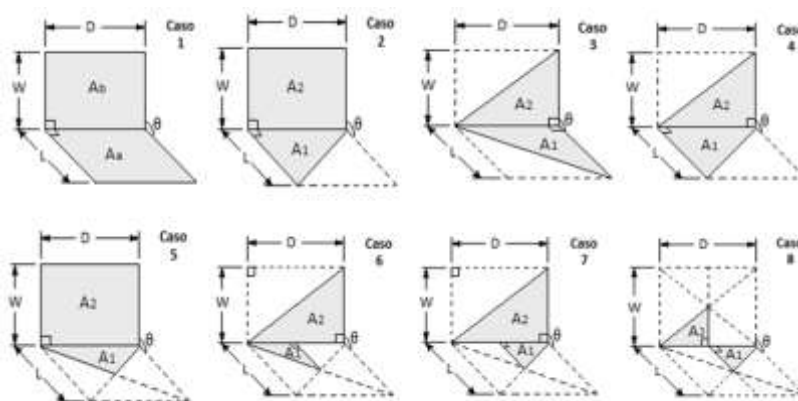


Figura 5. Configuraciones básicas de factores de visión para superficies triangulares (casos 1 al 8).

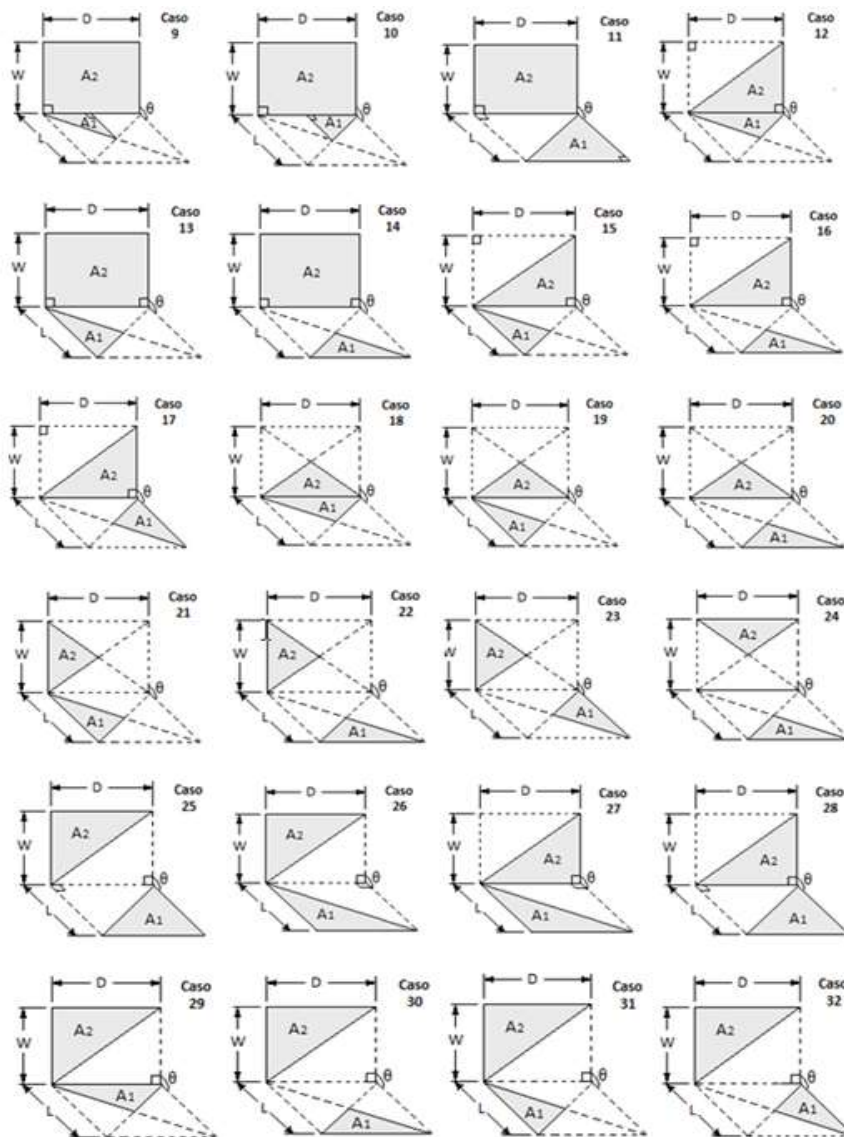


Figura 6. Configuraciones derivadas de factores de visión para superficies triangulares (casos 9 al 32).

2.4. Modelación matemática del factor de visión

2.4.1. Caso 2

En el Caso 2, las superficies emisora y receptora son un rectángulo y un triángulo rectángulo, respectivamente, con lado común D y ángulo θ entre ambas superficies. En este Caso (Figura 7), se establecen los límites de integración para cada proyección sobre las superficies A_1 y A_2 , obteniendo la relación (8):

$$f_{(2)} = F_{1-2} = \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos O_1 \cos O_2 dA_1 dA_2}{r^2} =$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dz \int_0^D \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (8)$$

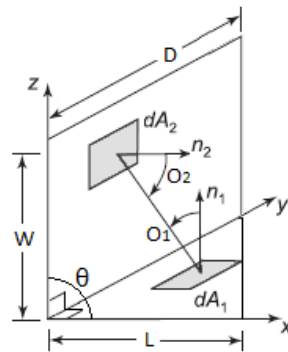


Figura 7. Geometría básica para el Caso 2.

Para ejecutar la integración dada en la Ecuación (8) fue realizado el siguiente cambio de variables (9):

$$W = a ; D = b ; L = c \quad (9)$$

La solución de la Ecuación (8) viene dada por (10):

$$\begin{aligned}
 f_{(2)} = 2f_{(1)} & \left\{ \frac{a^2 b^2}{8(a^2+b^2)} \ln \left(\frac{b^2+c^2}{(a^2+c^2)^2} \right) + \frac{a^2 b^4}{4(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{b(a^2+c^2)}{a(b^2+c^2)} \right) + \frac{a^4 b^2}{4(a^2+b^2)^2} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \right. \\
 & \frac{a^2 c^2}{8(a^2+b^2)} \ln \left(\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}{c^2(a^2+c^2)} \right) + \frac{a^2}{8} \ln \left(\frac{a^4(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)^2(a^2+c^2)} \right) + \frac{b^2}{8} \ln \left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{b^2(a^2+b^2+c^2)} \right) + \\
 & \frac{c^2}{8} \ln \left(\frac{c^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \right) + \frac{3}{4} ab \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} bc \tan^{-1} \left(\frac{b}{c} \right) - \\
 & \frac{1}{2} b \sqrt{a^2+c^2} \tan^{-1} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}} \right) - \frac{a^4}{8(a^2+b^2)} \ln(a^2+c^2) + \frac{ab^2(2a-\pi b)}{8(a^2+b^2)} + \\
 & \frac{a^2 b^2 \left(\frac{b^4}{a^2+b^2} - b^2 - c^2 \right)}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2}}} \tan^{-1} \left(\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \left(b^2+c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2} \right) - b^2 \{ (a^2+b^2) - b^2 \}} \right) - \\
 & \left. \frac{1}{2} \int_0^a \left[\frac{bx^2}{a \sqrt{x^2+c}} \tan^{-1} \left(\frac{a \sqrt{x^2+c}}{x^2+c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2-ax)} \right) + \frac{bx}{\sqrt{x^2+c}} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{b}{a}x-b}{\sqrt{x^2+c}} \right) \right] dx \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

En la Ecuación (10) el término $f_{(1)}$ es el factor de visión computado con la Ecuación (4). La solución de la Ecuación (8) requiere resolver $n^n = 4^4 = 256$ funciones primitivas; sin embargo, la última integral no fue resuelta, al no existir funciones primitivas para la misma, siendo requerido solucionarla mediante la RMS (con siete intervalos).

Obtener una solución analítica de la Ecuación (8) es extremadamente complejo, ya que incluye la suma de series infinitas con polilogaritmos. Una solución alternativa es el tratamiento de variable compleja de estas funciones especiales, con la adición de polinomios, que tienden progresivamente a la convergencia de la serie infinita de Spence, utilizando las RCB.

El Caso 2 fue obtenido a partir de la descomposición de superficies rectangulares en elementos triangulares (Figura 4), por tanto, la solución de la integral cuádruple de la Ecuación (8) es derivada de la Ecuación (4) y puede expresarse como en (11):

$$F_{1-2} = \varphi \cdot f_{(1)} \quad (11)$$

Donde: $f_{(1)}$ es el factor de visión computado con la Ecuación (4) y φ es la RCB.

La RCB se obtiene a partir de una suma estacionaria de factores de visión, ajustándose mediante polinomios a la familia de curvas generadas en el dominio evaluado. Habrá tantas curvas para ajustar como términos se consideren en la suma de la serie de polilogaritmos; por lo tanto, el aumento en los intervalos será proporcional a la precisión obtenida en los resultados. En la Ecuación (4) se observa que el factor de visión depende de dos parámetros (X,Y) , con un denominador común D ; por lo tanto, la raíz real será una función de estos. El lado común D es opuesto a las dimensiones W,L en las superficies A_a y A_b , lo que indica que el período de la función compleja (Camaraza-Medina 2021) viene dado por (12):

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{X}{Y} \right) \quad (12)$$

Para aplicar las RCB, se representa gráficamente la solución de la Ecuación (10) en el intervalo $0.1 \leq X \leq 10$ y $0.1 \leq Y \leq 10$ usando valores $X = Y = (0.1; 0.3; 0.6; 1; 3; 6; 10)$ para su construcción. Por tanto, a partir de los nodos superior e inferior, es posible dibujar la curva correspondiente a los valores mínimo y máximo de $Y = (0.1; 10)$. En la serie polilogarítmica infinita, se fija un valor de Y , y posteriormente se calculan los polilogaritmos para cada valor de X ; con este procedimiento se obtiene una familia de curvas a . Seguidamente, se aplica un procedimiento similar, pero fijando los valores de X al calcular los polilogaritmos para cada valor de Y , obteniendo así una familia de curvas b . Las curvas a y b se aproximan individualmente mediante el método de mínimos cuadrados, generando polinomios de la forma $mX^3 + nX^2 + oX + p$. Las constantes m,n,o,p se ponderan posteriormente para generar una función única φ , que depende del ángulo de formación ψ (Camaraza-Medina 2023).

Aplicando el método descrito en el párrafo anterior, se obtiene que la RCB para el Caso 2 viene dada por (13):

$$\varphi_2 = (-0.022Y^3 + 0.316Y^2 - 0.89Y + 0.5)\psi^2 + (0.056Y^3 - 0.783Y^2 + 2.23Y - 1.43)\psi - 0.03Y^3 + 0.407Y^2 - 1.07Y + 2.02 \quad (13)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4) y (13) en la Ecuación (11), se obtiene el factor de visión para el Caso 2 mediante las RCB, el cual viene dado por la relación (14):

$$f_{(2)} = F_{(1-2)} = \varphi_2 \cdot f_{(1)} \quad (14)$$

En la Figura (8) es presentada gráficamente la solución de la Ecuación (14) para $\theta = 90^\circ$.

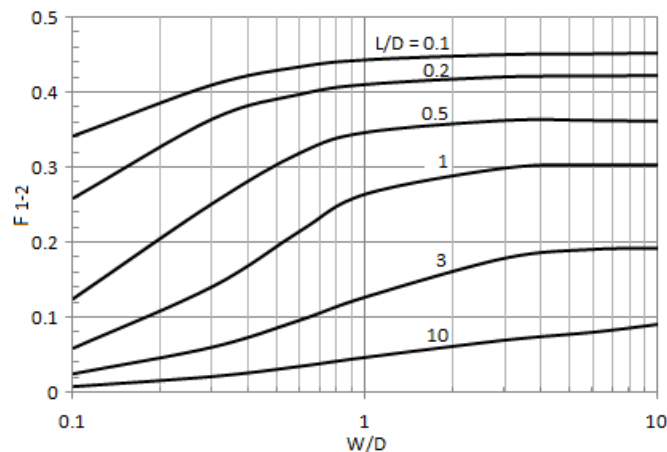


Figura 8. Solución gráfica de la Ecuación (14) para $\theta = 90^\circ$.

2.4.2 Casos del 3 al 8

Los Casos del 3 al 8 se reducen a las siguientes geometrías (Figura 5):

Caso 3: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies: vértices en un punto común

Caso 4: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies: vértices en extremos opuestos

Caso 5: Triángulo isósceles a rectángulo, con lado común y ángulo θ entre ambas superficies.

Caso 6: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo de distinto tamaño, con ángulo θ entre ambas superficies: vértices en un punto común

Caso 7: Triángulo rectángulo a triángulo rectángulo de distinto tamaño, con ángulo θ entre ambas superficies: vértices en extremos opuestos

Caso 8: Triángulos rectángulos perpendiculares con un borde igual y dispuestos en dirección opuesta

En los Casos del 3 al 8 (Figura 5), se establecen los límites de integración para cada proyección sobre las superficies A_1 y A_2 , obteniéndose las relaciones integrales (15) a (20) siguientes:

Caso 3

$$f_{(3)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/W} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (15)$$

Caso 4

$$f_{(4)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^L dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/W} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (16)$$

Caso 5

$$f_{(5)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dz \int_0^Z \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dy_2 \quad (17)$$

Caso 6

$$f_{(6)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_0^{y_1 D/L} dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/W} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (18)$$

Caso 7

$$f_{(7)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_{-y_1 D/L}^0 dx \int_0^W dy_2 \int_0^{y_2 D/W} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (19)$$

Caso 8

$$f_{(8)} = \frac{\sin^2 \theta}{\pi A_1} \int_0^{L/2} dy_1 \int_{-y_1 D/L}^0 dx \int_0^{W/2} dy_2 \int_0^{y_2 D/W} \frac{xz}{\{(y_1 - y_2)^2 + x^2 + z^2 - 2xz \cos \theta\}^2} dz \quad (20)$$

Mientras que las RCB para cada caso vienen dadas por las expresiones de la (21) a la (26):

Caso 3

$$f_{(3)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(-0.001Y^3 + 0.033Y^2 - 0.14Y + 0.265)\psi^2 + \\ &((0.011Y^3 - 0.177Y^2 + 0.7Y - 0.615)\psi - 0.01Y^3 + 0.142Y^2 - 0.475Y + 1.29) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Caso 4

$$f_{(4)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(-0.031Y^3 + 0.424Y^2 - 1.275Y + 1.1)\psi^2 + \\ &((0.071Y^3 - 0.975Y^2 + 2.92Y - 2.06)\psi - 0.034Y^3 + 0.462Y^2 - 1.268Y + 1.6) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Caso 5

$$f_{(5)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(-0.01Y^2 + 0.24Y + 0.67)\psi^2 + (0.02Y^2 - 0.31Y - 2.2)\psi - \\ &0.02Y^2 + 0.27Y + 3 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Caso 6

$$f_{(6)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \frac{(-0.02Y^3 + 0.29Y^2 - 1.1Y + 0.6)\psi^2 + (0.06Y^3 - 0.88Y^2 + 2.96Y - 1.41)\psi -}{0.04Y^3 + 0.55Y^2 + 1.41Y + 1.87} \right\} \quad (24)$$

Caso 7

$$f_{(7)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \frac{(-0.011Y^3 + 0.12Y^2 - 0.025Y + 0.52)\psi^2 +}{(0.025Y^3 - 0.307Y^2 + 0.49Y - 1.64)\psi - 0.014Y^3 + 0.183Y^2 - 0.35Y + 2.47} \right\} \quad (25)$$

Caso 8

$$f_{(8)} = f_{(1)} \cdot \left\{ \frac{(0.015Y^2 - 0.108Y + 0.08)\psi^2 + (-0.015Y^2 + 0.096Y + 0.048)\psi -}{0.001Y^2 + 0.04Y + 0.058} \right\} \quad (26)$$

En la Figura 9 es dada de forma gráfica la solución de las Ecuaciones (21) a la (26), para $\theta = 90^\circ$.

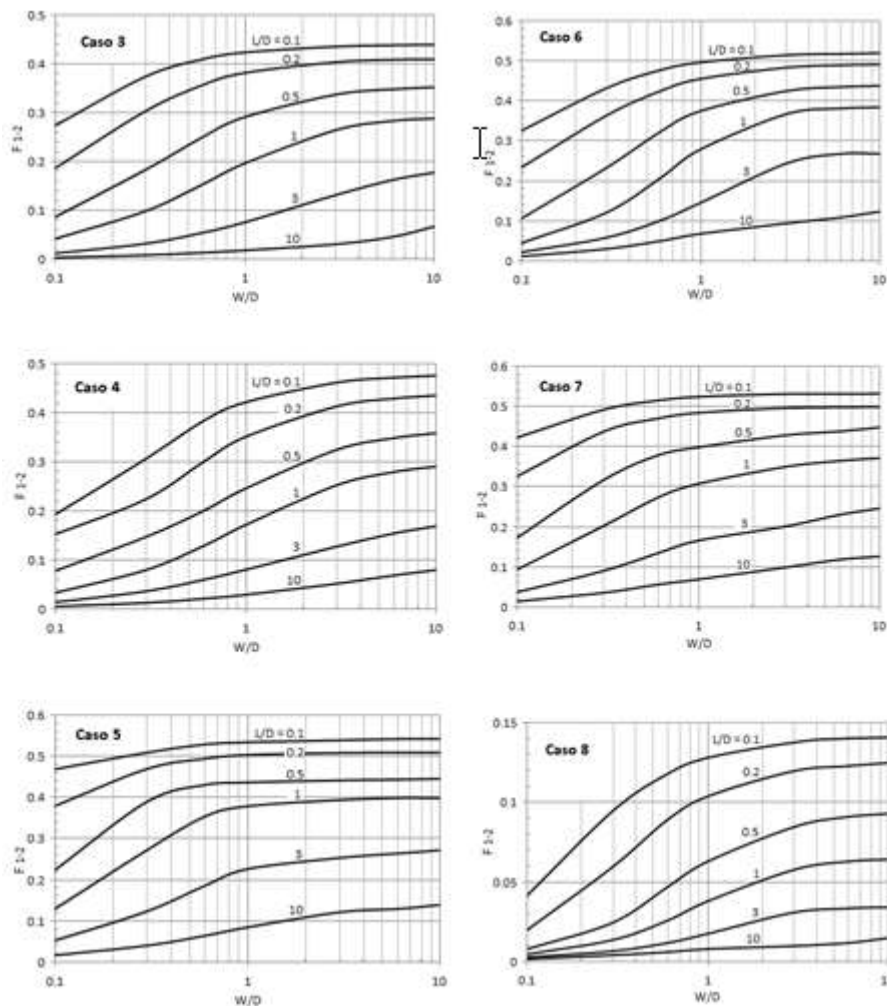


Figura 9. Solución gráfica de las Ecuaciones (21) a la (26) para $\theta = 90^\circ$.

2.4.3. Casos del 9 al 32

Mediante la combinación de los factores de visión $f_{(1)}$ al $f_{(8)}$ es posible obtener los factores de visión para los casos del 9 al 32, aplicando la regla de sumas y el álgebra de factores de forma. En la Tabla 2 son resumidas las relaciones para computar el factor de visión en las configuraciones derivadas (Figura 6, A y B).

Tabla 2. Configuración de factores de visión para superficies triangulares

Caso	$F_{1-2} \dots \{f_{(n)}\}$
Caso 9	$f_{(9)} = f_{(5)}$
Caso 10	$f_{(10)} = f_{(5)}$
Caso 11	$f_{(11)} = 2f_{(1)} - f_{(2)}$
Caso 12	$f_{(12)} = f_{(6)} + f_{(7)}$
Caso 13	$f_{(13)} = 2f_{(2)} - f_{(5)}$
Caso 14	$f_{(14)} = 4f_{(1)} + f_{(5)} - 4f_{(2)}$
Caso 15	$f_{(15)} = 2f_{(4)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 16	$f_{(16)} = 4f_{(1)} + f_{(6)} + f_{(7)} - 2f_{(3)} - 2f_{(4)}$
Caso 17	$f_{(17)} = 2f_{(3)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 18	$f_{(18)} = f_{(3)} + f_{(8)}$
Caso 19	$f_{(19)} = f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(3)} - f_{(8)}$
Caso 20	$f_{(20)} = 4f_{(5)} + f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$
Caso 21	$f_{(21)} = 3f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$
Caso 22	$f_{(22)} = 4f_{(1)} + 3f_{(6)} + 3f_{(7)} - 3f_{(3)} - 2f_{(4)} - 4f_{(5)} - f_{(8)}$
Caso 23	$f_{(23)} = 4f_{(5)} + f_{(3)} + f_{(8)} - 2f_{(6)} - 2f_{(7)}$
Caso 24	$f_{(24)} = 5f_{(3)} + 4f_{(4)} + 5f_{(5)} + f_{(8)} - 4f_{(1)} - 4f_{(2)} - 4f_{(6)} - 4f_{(7)}$
Caso 25	$f_{(25)} = 2f_{(1)} + f_{(4)} - 2f_{(2)}$
Caso 26	$f_{(26)} = 2f_{(1)} + f_{(3)} - 2f_{(2)}$
Caso 27	$f_{(27)} = f_{(2)} - f_{(3)}$
Caso 28	$f_{(28)} = f_{(2)} - f_{(4)}$
Caso 29	$f_{(29)} = f_{(5)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 30	$f_{(30)} = 2f_{(3)} + 2f_{(4)} + f_{(5)} - 4f_{(2)} - f_{(6)} - f_{(7)}$
Caso 31	$f_{(31)} = 2f_{(2)} + f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(5)} - 2f_{(4)}$
Caso 32	$f_{(32)} = 2f_{(2)} + f_{(6)} + f_{(7)} - f_{(5)} - 2f_{(3)}$

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El porcentaje de desviación (error) se calcula con respecto a la SA y se computa de la manera que se expresa en (27):

D_{\%} = 100 \cdot \left(\frac{SA - Val}{SA} \right) \tag{27}

Donde: $D_{\%}$ es el porcentaje de desviación, en %. SA es el factor de visión computado mediante la solución analítica. Val es el factor de visión obtenido con otros métodos.

En la Tabla 3 es resumida una comparación entre los factores de visión para doce configuraciones geométricas arbitrarias, obtenidos mediante la SA, la RMS (con cinco intervalos), la SGS y la RCB usando la Ecuación (14), así como los valores de $D_{\%}$ obtenidos con la Ecuación (27).

Tabla 3. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 2

Configuración	Método evaluación				D_{\%}		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
X = 0.3 ; Y = 0.2	0,36432	0,36013	0,36	0,36398	1,15	1,19	0,09
X = 0.3 ; Y = 0.5	0,25129	0,25072	0,25	0,25191	0,23	0,51	-0,25
X = 0.3 ; Y = 1	0,14106	0,15113	0,15	0,14087	-2,89	-2,79	0,13
X = 1 ; Y = 0.5	0,34661	0,34988	0,35	0,34687	-0,94	-0,98	-0,08
X = 1 ; Y = 1	0,26544	0,25978	0,26	0,26508	2,13	2,05	0,14
X = 0.6 ; Y = 1	0,21533	0,21886	0,22	0,21599	-1,64	-2,17	-0,31
X = 0.6 ; Y = 3	0,09588	0,09915	0,1	0,09627	-3,41	-4,3	-0,41
X = 3 ; Y = 3	0,18015	0,17894	0,18	0,17985	0,67	0,08	0,17
X = 0.6 ; Y = 10	0,03598	0,03882	0,04	0,03546	-7,89	-11,17	1,45
X = 1 ; Y = 10	0,04688	0,04833	0,05	0,04709	-3,09	-6,66	-0,45
X = 10 ; Y = 1	0,30886	0,30411	0,3	0,30731	1,54	2,87	0,5
X = 10 ; Y = 10	0,08879	0,08916	0,09	0,09021	-0,42	-1,36	-1,6

En la Figura 10 son graficados en bandas de error de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$, los $D_{\%}$ obtenidos con la Ecuación (18) para 48 factores de visión en el intervalo $0.1 \leq X, Y \leq 10$, calculados con RMS y RCB para el Caso 2.

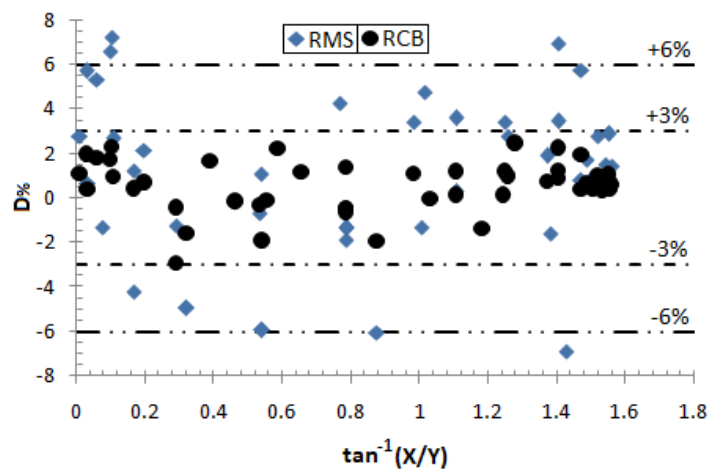


Figura 10. Valores $D_{\%}$ obtenidos para el Caso 2.

Para el Caso 2, la Figura 10 muestra que las RCB proporcionan un mejor ajuste con respecto a la SA, con un error medio de $\pm 3\%$ en el 100% de los puntos $(Y; X)$ analizados. Contrariamente, los factores de visión obtenidos con RMS, brindan un menor ajuste con respecto a la SA, con errores medios de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$ para el 54,8% y 85,7% de los puntos $(Y; X)$ evaluados, respectivamente.

Para los Casos del 3 al 8, en las Tablas 4, 5, 6, 7, 8 y 9 es resumida una comparación entre los factores de visión para doce configuraciones geométricas $X; Y$ preestablecidas, obtenidos mediante la SA, la RMS (con cinco intervalos), la solución SGS y la RCB usando las Ecuaciones (21) a la (26), así como los valores de $D_{\%}$ obtenidos con la Ecuación (27).

Tabla 4. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 3

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,30198	0,30556	0,3	0,30353	-1,19	0,66	-0,51
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,18334	0,17885	0,18	0,18292	2,45	1,82	0,23
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,09776	0,1035	0,1	0,09847	-5,87	-2,29	-0,73
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,28983	0,28668	0,29	0,29087	1,09	-0,06	-0,36
$X = 1 ; Y = 1$	0,19922	0,20092	0,2	0,19609	-0,85	-0,39	1,57
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,15402	0,15227	0,15	0,15316	1,14	2,61	0,56
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,05526	0,05876	0,06	0,05492	-6,33	-8,58	0,62
$X = 3 ; Y = 3$	0,13119	0,12966	0,13	0,1313	1,17	0,91	-0,08
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,01361	0,01435	0,014	0,01327	-5,44	-2,87	2,5
$X = 1 ; Y = 10$	0,01804	0,01896	0,02	0,01795	-5,1	-10,86	0,5

$X = 10 ; Y = 1$	0,28705	0,28106	0,28	0,28803	2,09	2,46	-0,34
$X = 10 ; Y = 10$	0,06884	0,06915	0,07	0,06665	-0,45	-1,69	3,18

Tabla 5. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 4

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,22553	0,22946	0,23	0,22471	-1,74	-1,98	0,36
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,14683	0,14186	0,14	0,14769	3,38	4,65	-0,59
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,08129	0,07966	0,08	0,08049	2,01	1,59	0,98
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,24598	0,25148	0,25	0,24706	-2,24	-1,63	-0,44
$X = 1 ; Y = 1$	0,17409	0,17912	0,18	0,17202	-2,89	-3,39	1,19
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,12881	0,12953	0,13	0,12908	-0,56	-0,92	-0,21
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,06177	0,06098	0,06	0,06092	1,28	2,87	1,38
$X = 3 ; Y = 3$	0,12795	0,12916	0,13	0,12844	-0,95	-1,6	-0,38
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,02063	0,02187	0,02	0,02117	-6,01	3,05	-2,62
$X = 1 ; Y = 10$	0,03048	0,03116	0,03	0,02976	-2,23	1,57	2,36
$X = 10 ; Y = 1$	0,29413	0,28776	0,29	0,29804	2,17	1,4	-1,33
$X = 10 ; Y = 10$	0,08054	0,08101	0,08	0,0808	-0,58	0,67	-0,32

Tabla 6. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 5

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,47668	0,46116	0,46	0,48334	3,26	3,5	-1,4
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,39115	0,38942	0,39	0,39024	0,44	0,29	0,23
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,27207	0,27085	0,27	0,27338	0,45	0,76	-0,48
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,43765	0,43888	0,44	0,43666	-0,28	-0,54	0,23
$X = 1 ; Y = 1$	0,36884	0,36943	0,37	0,36998	-0,16	-0,31	-0,31
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,35009	0,35073	0,35	0,34974	-0,18	0,03	0,1
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,18415	0,18216	0,18	0,18602	1,08	2,25	-1,02
$X = 3 ; Y = 3$	0,25532	0,24991	0,25	0,2542	2,12	2,08	0,44
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,06544	0,06888	0,07	0,06419	-5,26	-6,97	1,91
$X = 1 ; Y = 10$	0,08596	0,09012	0,09	0,08454	-4,84	-4,7	1,65
$X = 10 ; Y = 1$	0,39048	0,39777	0,4	0,38246	-1,87	-2,44	2,05
$X = 10 ; Y = 10$	0,13045	0,12876	0,13	0,13124	1,3	0,34	-0,61

Tabla 7. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 6

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,36187	0,35228	0,35	0,36463	2,65	3,28	-0,76
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,23651	0,23913	0,24	0,23443	-1,11	-1,48	0,88
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,12506	0,12887	0,13	0,12227	-3,05	-3,95	2,23
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,37901	0,38077	0,38	0,37623	-0,46	-0,26	0,73
$X = 1 ; Y = 1$	0,27998	0,27966	0,28	0,28035	0,11	-0,01	-0,13
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,21234	0,21793	0,22	0,20936	-2,63	-3,61	1,4
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,10095	0,10144	0,1	0,10305	-0,49	0,94	-2,08
$X = 3 ; Y = 3$	0,24202	0,22308	0,22	0,24523	7,83	9,1	-1,33
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,05096	0,05063	0,05	0,05078	0,65	1,88	0,35
$X = 1 ; Y = 10$	0,06734	0,06133	0,06	0,06916	8,92	10,9	-2,7
$X = 10 ; Y = 1$	0,38714	0,38901	0,39	0,38532	-0,48	-0,74	0,47
$X = 10 ; Y = 10$	0,11107	0,11233	0,11	0,11311	-1,13	0,96	-1,84

Tabla 8. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 7

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,43944	0,43908	0,44	0,43825	0,08	-0,13	0,27
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,31644	0,31886	0,32	0,31778	-0,76	-1,13	-0,42
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,20644	0,20889	0,21	0,20212	-1,19	-1,72	2,09
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,40098	0,39976	0,4	0,40061	0,3	0,24	0,09
$X = 1 ; Y = 1$	0,30841	0,30963	0,31	0,30744	-0,4	-0,52	0,31
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,27551	0,27785	0,28	0,27297	-0,85	-1,63	0,92
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,13882	0,13796	0,14	0,13755	0,62	-0,85	0,91
$X = 3 ; Y = 3$	0,20332	0,20611	0,21	0,20109	-1,37	-3,29	1,1
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,05691	0,05823	0,06	0,05722	-2,32	-5,43	-0,54
$X = 1 ; Y = 10$	0,07394	0,06882	0,07	0,07575	6,92	5,33	-2,45
$X = 10 ; Y = 1$	0,37018	0,37096	0,37	0,3712	-0,21	0,05	-0,28
$X = 10 ; Y = 10$	0,11863	0,11854	0,12	0,11759	0,08	-1,15	0,88

Tabla 9. Comparación de factores de visión y $D_{\%}$ obtenido para el Caso 8

Configuración	Método evaluación				$D_{\%}$		
	SA	RMS	SGS	RCB	RMS	SGS	RCB
$X = 0.3 ; Y = 0.2$	0,06034	0,05817	---	0,05975	3,6	---	0,98
$X = 0.3 ; Y = 0.5$	0,02594	0,02712	---	0,02545	-4,55	---	1,89
$X = 0.3 ; Y = 1$	0,01416	0,01542	0,015	0,01403	-6,78	-5,93	0,92
$X = 1 ; Y = 0.5$	0,06288	0,06147	---	0,06326	2,24	---	-0,6
$X = 1 ; Y = 1$	0,03831	0,03716	0,037	0,03807	3	3,42	0,63
$X = 0.6 ; Y = 1$	0,02617	0,02417	0,024	0,02629	7,64	8,29	-0,46
$X = 0.6 ; Y = 3$	0,01268	0,01335	0,013	0,01227	-5,28	-2,52	3,23
$X = 3 ; Y = 3$	0,03154	0,03076	---	0,03121	2,47	---	1,05
$X = 0.6 ; Y = 10$	0,00588	0,00536	0,005	0,00604	8,84	14,97	-2,72
$X = 1 ; Y = 10$	0,00786	0,00714	0,007	0,00782	9,16	10,94	0,51
$X = 10 ; Y = 1$	0,06394	0,06605	---	0,06446	-3,3	---	-0,81
$X = 10 ; Y = 10$	0,01557	0,01431	---	0,01541	8,09	---	1,03

En la Figura 11 son graficados en bandas de error de $\pm 3\%$ y $\pm 6\%$, los $D_{\%}$ obtenidos con la Ecuación (27) para 48 factores de visión en el intervalo $0.1 \leq X, Y \leq 10$, calculados con RMS y RCB para los Casos 3 al 8.

La Figura 11 muestra que las RCB proporcionan el mejor ajuste respecto a la SA en todos los casos del 3 al 8, con diferentes porcentajes de error medio en los puntos $(Y; X)$ analizados. En el caso 3, el error medio es de $\pm 3\%$ en el 97,6% de los puntos $(Y; X)$. En los casos 4, 5 y 6 el un error medio es de $\pm 3\%$ en el 92,9%, 90,5% y 95,5%, respectivamente y de $\pm 6\%$ en el 100% de los puntos $(Y; X)$ analizados en estos casos. Los errores medios fueron de $\pm 3\%$ en el 100% de los puntos $(Y; X)$ analizados en los casos 7 y 8.

Igualmente, la Figura 11 revela que, por el contrario, los factores de visión obtenidos con RMB proporcionan menor ajuste respecto a SA, computando errores medios de $\pm 3\%$ en el 28,5% de los puntos $(Y; X)$ evaluados en el caso 3; en el 38,1% en el caso 4; en el 21,4% en el caso 5; en el 26,2% en el caso 6; en el 31,0% en el caso 7 y en el 23,8% en el caso 8. Así como errores medios de $\pm 6\%$ en el 64,3% (caso 3); 69,0% (caso 4); 61,9% (caso 5); 71,4% (caso 6); 81,0% (caso 7) y 73,8% (caso 8) de los puntos $(Y; X)$ analizados en cada caso referido.

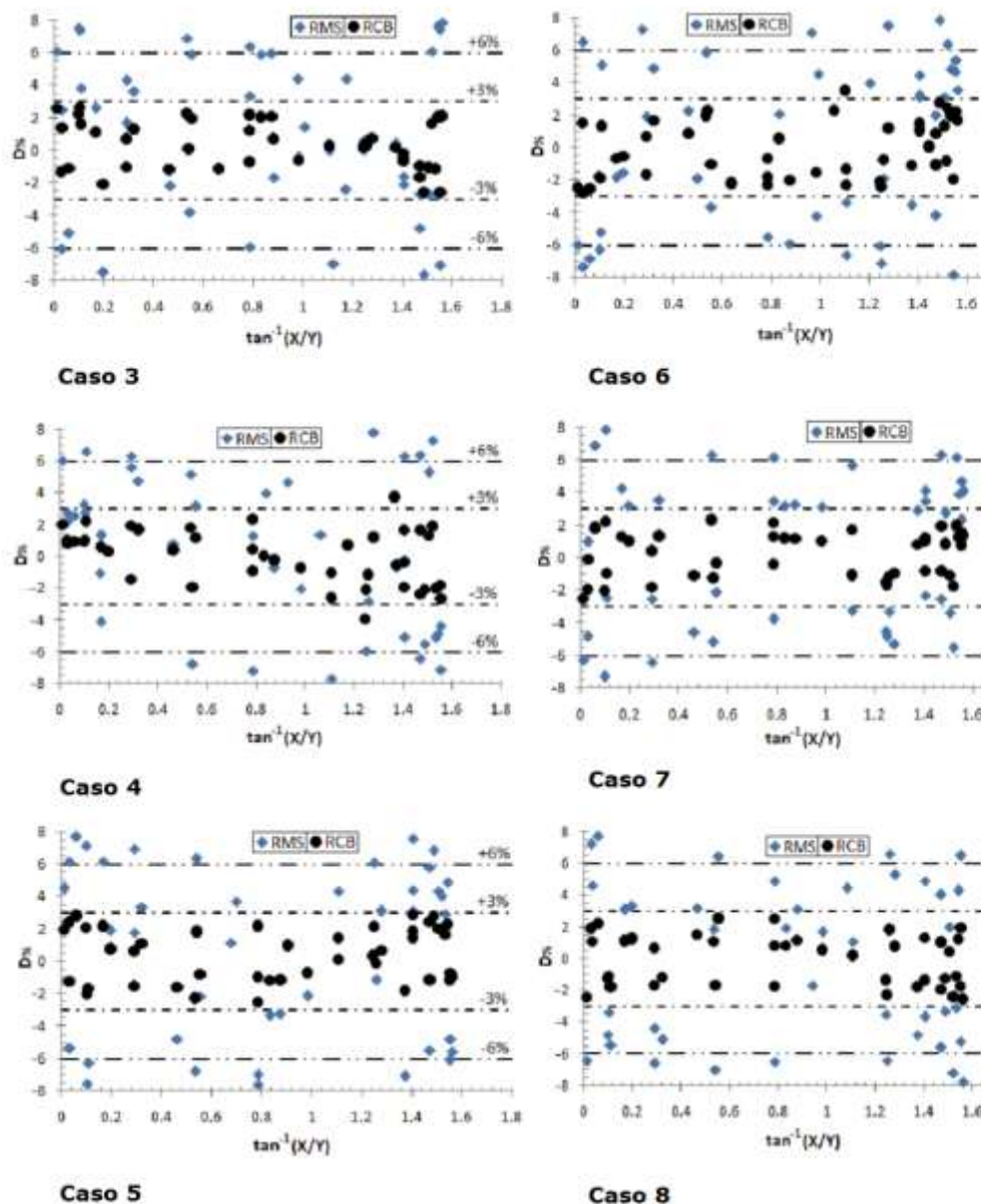


Figura 11. Valores $D\%$ obtenidos para los Casos del 3 al 8.

4. CONCLUSIONES

- Conocer el factor de visión es uno de los aspectos más importantes durante el intercambio de energía radiante, ya que una solución analítica facilita considerablemente el trabajo de los ingenieros térmicos, permitiendo estimarlo de forma rápida y adecuada.
- El presente trabajo proporciona información sobre el desarrollo de métodos para el cálculo del factor de visión durante el intercambio de energía radiante entre 32 combinaciones de geometrías triangulares con arista común.

- Se calculan doce ejemplos con diversas relaciones de aspecto para cada geometría, utilizando la SA, la RMS, la SGS y las RCB. A partir de las ocho geometrías básicas, se obtiene el factor de visión para otras 24 geometrías triangulares mediante la regla de la suma. En todos los casos, alcanzan valores de ajuste idénticos de RMS y SGS con respecto a la SA, mientras que la RCB muestra el mejor ajuste en todos los casos examinados.
- Dada la naturaleza práctica de la contribución y los valores razonables de los ajustes obtenidos, la propuesta constituye una herramienta adecuada para su aplicación en ingeniería térmica y prácticas afines que requieren cálculos de radiación térmica.
- Debido a la falta de antecedentes similares en la literatura, las soluciones analíticas propuestas refuerzan el valor científico y práctico de esta investigación y pueden incorporarse a los catálogos actualmente disponibles para el cálculo del factor de visión.

5. REFERENCIAS

- Biehs, S. A., Messina, R., Venkataram, P. S., Rodriguez, A. W., Cuevas, J. C. and Ben-Abdallah, P. (2021). Near-field radiative heat transfer in many-body systems. *Reviews of Modern Physics*, 93(2), 025009.
- Boeke, W. and Wall, L. (1976). Radiative exchange factors in rectangular spaces for the determination of mean radiant temperatures. *Building Services Engineer*, 43, 244-253.
- Bonnici, M., Mollicone, P., Fenech, M. and Azzopardi, M. A. (2019). Analytical and numerical models for thermal related design of a new pico-satellite. *Applied Thermal Engineering*, 159, 113908.
- Camaraza-Medina, Y., Hernandez-Guerrero, A., Luviano-Ortiz, J. L. (2022). Analytical view factor solution for radiant heat transfer between two arbitrary rectangular surfaces. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 147(24), 14999–15016.
- Camaraza-Medina, Y. (2023). Aplicación de raíces cruzadas polinomiales al intercambio de energía radiante entre dos geometrías triangulares. *Ingenius, Revista de Ciencia y Tecnología*, 30, 29-41.
- Camaraza-Medina, Y. (2021). Methods for the determination of the heat transfer coefficient in air cooled condenser used at biomass power plants. *International Journal of Heat and Technology*, 39(5), 1443-1450.

- Camaraza-Medina, Y., Hernandez-Guerrero, A. and Luviano-Ortiz, J. L. (2023). View factor for radiative heat transfer calculations between triangular geometries with common edge. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 148(10), 4523–4539.
- DeSutter, J., Tang, L. and Francoeur, M. (2019). A near-field radiative heat transfer device. *Nature Nanotechnology*, 14(8), 751-755.
- Ehlert, J. R. and Smith, T. F. (1993). View factors for perpendicular and parallel rectangular plates. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 7(1), 173-175.
- Feingold, A. (1966). Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London*, 292, 51-60.
- Francisco, S. C., Raimundo, A. M., Gaspar, A. R., Oliveira, A. V. M. and Quintela, D. A. (2014). Calculation of view factors for complex geometries using Stokes' theorem. *Journal of Building Performance Simulation*, 7(3), 203-216.
- Gupta, M. K., Bumtariya, K. J., Shukla, H. A., Patel, P. and Khan, Z. (2017). Methods for evaluation of radiation view factor: a review. *Material Today Proceeding*, 4(2), 1236-1243.
- Hamilton, D. C. and Morgan, M. R. (1952). Radiant-interchange configuration factors. NASA TN 2836.
- Howell, J. R. (2023). *A catalog of radiation heat transfer configuration factors* (7th ed.). MIT Press, United Kingdom, p. 180-185.
- Howell, J. R. and Mengüç, M. P. (2011). Radiative transfer configuration factor catalog: A listing of relations for common geometries. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 112, 910-912.
- Howell, J. R., Mengüç, J. P., Daun, K. and Siegel, R. (2020). *Thermal Radiation Heat Transfer* (7th ed.). CRC Press, USA, p. 105-106.
- Krishnaprakas, C. K. (1997). View factor between inclined rectangles. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 11(3), 480-481.
- Lakhi, M. and Safavinejad, A. (2021). Numerical investigation of combined force convective–radiative heat transfer in a horizontal channel with lattice Boltzmann method. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 146, 1911-1922.

- Modest, F. M. and Mazumder, S. (2021). *Radiative heat transfer* (4th ed.). Academic Press, United Kingdom, p. 130-145.
- Narayanaswamy, A. (2015). An analytic expression for radiation view factor between two arbitrarily oriented planar polygons. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91, 841-847.
- Narayanaswamy, A. and Meyappan, P. (2015). An analytic expression for radiation view factors between two planar triangles with arbitrary orientations. *Advances in Computational Heat Transfer*, 6, 2015-2019
- Nassar, Y. F. 2020. Analytical-numerical computation of view factor for several arrangements of two rectangular surfaces with non-common edge. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 159: 120130.
- Reddy, R. S., Arepally, D. and Datta, A. K. (2023). View factor computation and radiation energy analysis in baking oven with obstructions: Analytical and numerical method. *Journal of Food Process Engineering*, 46(3), 4270.
- Sauer, H. J. (1974). Configuration factors for radiant energy interchange with triangular areas. *ASHRAE Transactions*, 80(2), 268-279.
- Sönmez, F. F., Ziar, H., Isabella, O. and Zeman, M. (2019). Fast and accurate ray-casting-based view factor estimation method for complex geometries. *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 200, 109934.
- Thyageswaran, S. (2022). Simpler view factor calculations for mutually perpendicular rectangles. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 283, 108151.
- Yarahmadi, M., Robert-Mahan, J. and McFall, K. (2020). Artificial neural networks in radiation heat transfer analysis. *ASME J Heat Transfer*, 142(9), 092801.
- Yi, X. J., Zhong, L. Y., Wang, T. B., Liu, W. X., Zhang, D. J., Yu, T. B. and Liu, N. H. (2019). Near-field radiative heat transfer between hyperbolic metasurfaces based on black phosphorus. *The European Physical Journal B*, 92, e217.
- Zhou, Y., Duan, R., Zhu, X., Wu, J., Ma, J., Li, X. and Wang, Q. (2020). An improved model to calculate radiative heat transfer in hot combustion gases. *Combustion Theory and Modelling*, 24(5), 829-851.

Información adicional**Conflicto de intereses**

El autor declara que no existen conflictos de intereses.

ORCID

YCM: <https://orcid.org/0000-0003-2287-7519>

Recibido: 01/03/2025

Aceptado: 25/03/2025