

Validación experimental de modelos físico-matemáticos del secado natural de mena laterítica

Experimental validation of physical-mathematical models of natural drying of laterite ore

Yoalbys Retirado-Mediaceja^{1*}, Arístides Alejandro Legrá-Lobaina¹, Yanan Camaraza-Medina², Héctor Luis Laurencio-Alfonso³, Marcelo Fabián Salazar-Corrales⁴, William Giovanny Quitiaquez-Sarzosa⁵

¹Universidad de Moa, Holguín, Cuba.

²Universidad de Guanajuato, Guanajuato, México.

³Universidad Técnica de Cotopaxi, Latacunga, Ecuador.

⁴Universidad de las Fuerzas Armadas, Latacunga, Ecuador.

⁵Universidad Politécnica Salesiana, Quito, Ecuador.

*Autor para la correspondencia: yretirado@ismm.edu.cu

Resumen

El proceso de secado natural de la mena laterítica ha sido objeto de modelación con el propósito de perfeccionar la tecnología usada en su implementación. Sin embargo, los modelos actualmente utilizados para el análisis energético del proceso no han sido validados experimentalmente. Para dar solución a este problema se realiza el presente trabajo en el cual, mediante la implementación de un diseño de experimentos multifactorial, se desarrolló la validación experimental de los modelos físico-matemáticos del secado natural de la mena laterítica. Se corroboró que los modelos describen la realidad física del proceso con elevada precisión (93,43 %), la cual puede ser mejorada a través de la modelación multidimensional (2D y 3D) de los procesos de transferencia de calor y masa que caracterizan al objeto de estudio.

Palabras clave: diseño de experimentos, validación experimental, modelos matemáticos, secado natural, mena laterítica

Abstract

The process of natural drying of laterite ore has been the subject of modeling with the purpose of perfecting the technology used in its implementation. However, the models currently used for the energetic analysis of the process

have not been experimentally validated. In order to solve this unsolved problem, the present work is developed in which, through the implementation of a multifactorial design of experiments, the experimental validation of the physical-mathematical models of the natural drying of laterite ore was developed. It was corroborated that the models describe the physical reality of the process with high accuracy (93.43 %), which can be improved through multidimensional modeling (2D and 3D) of the heat and mass transfer processes that characterize the object of study.

Keywords: design of experiments, experimental validation, mathematical models, natural drying, laterite ore

1. INTRODUCCIÓN

El secado solar, por sus aplicaciones diversas y sostenibles, es ampliamente estudiado a nivel internacional (Rao *et al.*, 2025; Xu y Liu, 2025; Choubey *et al.*, 2025; Nnamchi *et al.*, 2025; Morya *et al.*, 2025; Karadirek *et al.*, 2025; Odoi-Yorke *et al.*, 2025). En la mena laterítica (tierra mineral) que procesa la industria cubana de níquel, el secado natural (eólico y solar) ha sido objeto de varios estudios. Los primeros trabajos se enfocaron en el establecimiento de una tecnología para el procesamiento del material en los depósitos mineros de la Empresa Productora de Níquel y Cobalto Comandante Ernesto Che Guevara de Moa (Estenoz, 2001; Estenoz *et al.* 2004, 2006).

Posteriormente, interesantes investigaciones (Estenoz *et al.*, 2005, Estenoz *et al.*, 2007a y 2007b; Estenoz, 2009; Fuentes y Estenoz-Mejia, 2020) dedicadas a la implementación práctica del proceso en la referida entidad productiva fueron desarrollados por un grupo multidisciplinario del Centro de Desarrollo de Investigaciones del Níquel (CEDINIQ). Estas diseñaron una tecnología para el secado natural de la mena laterítica que prevé la formación, evacuación y control de las operaciones con pilas de minerales en los depósitos mineros.

La tecnología diseñada, aunque posee varias ventajas, presenta limitaciones (Retirado-Mediaceja, 2012; Retirado-Mediaceja *et al.*, 2018) como las siguientes: presupone la construcción de instalaciones auxiliares con elevado consumo de energía y no considera la evaluación rigurosa de los procesos de transferencia de calor y masa que inciden en el secado natural, así como la aplicación de modelos matemáticos ajustados a las condiciones en que se desarrolla el proceso en la industria niquelífera. No obstante, a ser esta una práctica mundialmente implementada con otros materiales (Javaherdeh *et al.*, 2006; Montoya y Jiménez, 2006; Parra-Coronado *et al.*, 2008; Salinas *et al.*, 2008; Sandoval-Torres, 2009; Bergues-Ricardo *et al.*, 2014; Pandey *et al.*, 2024); no permite predecir la variación

de humedad que experimenta el material durante el proceso de secado natural y no concibe la caracterización de la geometría de la sección transversal de las pilas.

Las mencionadas inconsistencias de la tecnología fueron resueltas en las investigaciones desarrolladas en la Universidad de Moa a partir de la modelación matemática, simulación y optimización energética del proceso (Retirado-Mediaceja y Legrá, 2011; Retirado-Mediaceja *et al.*, 2012a y 2012b). Sin embargo, a pesar de la probada efectividad demostrada por los modelos establecidos (Retirado-Mediaceja *et al.*, 2014, 2015 y 2016) no se reportan trabajos destinados a su validación experimental, a partir de la implementación de un diseño de experimentos ajustado a las características específicas en que se desarrolla el proceso.

La validación de los modelos matemáticos tiene gran importancia porque permite conocer con qué precisión estos se corresponden con la realidad física del proceso investigado (Brito-Vallina *et al.*, 2011). La validación puede realizarse comparándolos con los datos reportados por otros modelos ya validados, valorando las conclusiones que se obtienen al usar el modelo en cuestión o comparando los resultados obtenidos con el uso de los modelos con datos experimentales disponibles sobre el objeto de estudio (Legrá y Silva, 2011). A este último aspecto está destinado el presente trabajo que tiene como objetivo: desarrollar la validación experimental de los modelos físico-matemáticos establecidos para el análisis energético del proceso de secado natural de la mena laterítica procesada en la industria cubana de níquel.

En las próximas secciones del artículo se exponen los materiales y métodos, que incluyen los modelos y los datos experimentales usados en la validación. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos, se definen las líneas futuras de investigación y se arriba a conclusiones sobre los aspectos más relevantes abordados.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. Modelos físico-matemáticos del secado solar natural

La modelación matemática del proceso de secado natural de la mena laterítica permite estudiarlo teóricamente y, luego de la correspondiente validación experimental, posibilita realizar simulaciones computacionales del proceso mediante el empleo de adecuados sistemas informáticos (Retirado-Mediaceja *et al.*, 2017).

El estudio que aquí se presenta consideró la modelación desarrollada por Retirado-Mediaceja *et al.* (2012b) e incorporó la sistematización del cálculo

del área de captación, los flujos de calor transferidos, la distribución de temperatura y de humedad que experimenta el material en las pilas $H(y, \tau)$ (Figura 1). El modelo propuesto se obtiene al resolver las ecuaciones de conducción del calor y de la humedad mediante el método de separación de variables (Jiménez, 1999). Este es el método más ampliamente utilizado y consiste en dividir la variable dependiente en funciones de una sola variable independiente para, resolverlas por separado (Polyanin y Manzhirov, 2022).

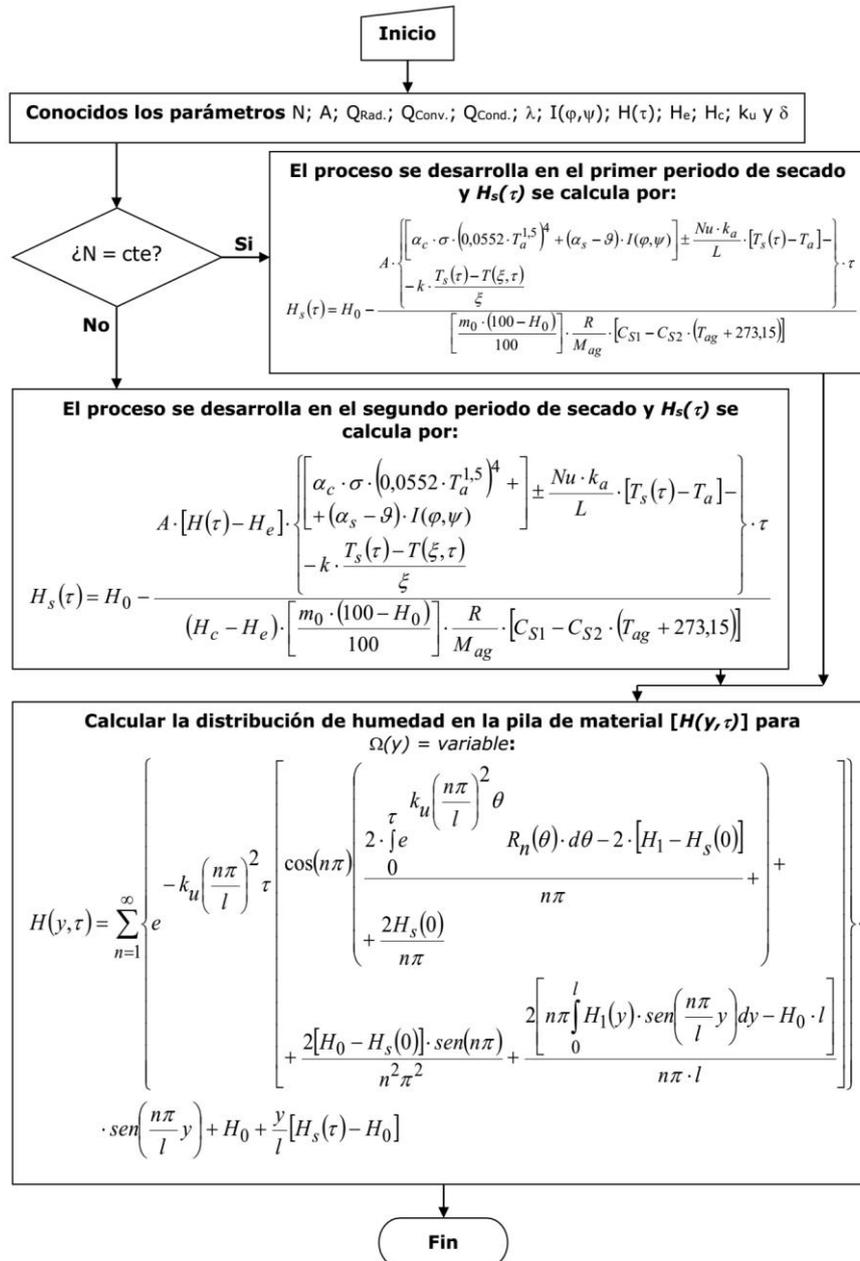


Figura 1. Sistematización de los modelos matemáticos del secado natural de la mena laterítica (Retirado-Mediaceja et al., 2016).

Donde:

N - régimen de secado ($\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$); A - área de exposición de la pila (m^2); q_{Rad} - flujo de calor por radiación que se aprovecha en el secado natural de la mena laterítica (W/m^2); q_{Conv} - flujo de calor por convección que intercambian el aire y la superficie de secado de la pila (W/m^2); q_{Cond} : calor transferido por conducción hacia el interior de la pila (W/m^2); λ - calor latente de vaporización del agua (J/kg); $I(\varphi, \psi)$ - radiación solar global que incide sobre la superficie de secado de la pila (W/m^2); $H_s(\tau)$ - humedad del material en la superficie de secado de la pila (para $y=l$) en el instante τ (kg/kg); H_e - humedad de equilibrio del material (kg/kg); H_c - humedad del material al finalizar el régimen de velocidad de secado constante (kg/kg); k_u - coeficiente de conducción de humedad (m^2/s); δ - coeficiente térmico de conducción de humedad ($1/^\circ\text{C}$); H_0 - humedad inicial del material (kg/kg); α_c - absortividad del cielo (adimensional); σ - constante de Stefan-Boltzman ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$); T_a - temperatura del aire (K); α_s - absortividad solar de la mena laterítica (adimensional); ρ - reflectividad de la mena laterítica (adimensional); Nu - número de *Nusselt* (adimensional); k_a - conductividad térmica del aire ($\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$); L - longitud característica de la superficie de secado (m); $T_s(\tau)$ - temperatura en la superficie de la pila en el instante τ (K); k - conductividad térmica de la mena laterítica ($\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$); $T(\xi, \tau)$ - temperatura en el interior de la pila en el espesor ξ (K); ξ - espesor de la capa de material donde se produce la conducción del calor (m); m_0 - masa inicial de material sin secar (kg); H_0 - humedad inicial del material (kg/kg); R - constante de los gases ($\text{J}/\text{kmol} \cdot \text{K}$); M_{ag} - peso molecular del agua (kg/kmol); C_{S1} y C_{S2} - constantes experimentales (adimensionales); T_{ag} - temperatura del agua ($^\circ\text{C}$); H_e - humedad de equilibrio del material (kg/kg); H_c - humedad del material al finalizar el régimen de velocidad de secado constante (kg/kg); $H(y, \tau)$ - humedad en el interior de la pila en la altura y tiempo y, τ (%).

2.2. Procedimiento para la validación de los modelos

2.2.1. Condiciones experimentales

Los experimentos se realizaron con mena laterítica extraída del frente de explotación. El material se transportó en camiones desde la mina de la empresa hasta el CEDINIQ, donde se depositó en el patio de secado solar y se procedió a la formación de las pilas de minerales usando para ello cargadores frontales y otros equipos recomendados por Estenoz y Espinosa (2003) para este propósito.

2.2.2. Selección de las variables

La velocidad de secado de la mena laterítica durante el proceso de secado natural depende de múltiples variables, entre ellas se encuentran: masa de material expuesta a secado, ángulo de reposo y dimensiones de las pilas, humedad inicial y final del material (Retirado-Mediaceja *et al.*, 2017). Para la validación experimental de los modelos matemáticos las mencionadas variables se midieron de forma directa en las pilas. También se consideraron los parámetros meteorológicos que influyen en el secado natural. Las particularidades de las variables se describen a continuación:

- *Masa de laterita, ángulo de reposo y dimensiones de las pilas*

Se construyeron tres pilas de mena laterítica, dos con 500 t de material y la otra con 700 t. Se experimentó con un ángulo de reposo (maximal) de 61 grados sexagesimales. Las características generales de las pilas de mineral se muestran a continuación (Tabla 1)

Tabla 1. Dimensiones de las pilas de laterita expuestas a secado natural

Masa (t)	Largo (m)	Ancho (m)	Geometría de la sección transversal	Eje de orientación
500	140	3,20	triangular	norte-sur
700	140	5,49	triangular	norte-sur

Estas características de las pilas se corresponden con las utilizadas en la implementación práctica del proceso de secado natural en la empresa cubana productora de níquel y cobalto (Estenoz, 2009; Espinosa y Pérez, 2010b; Vinardell, 2011; Fuentes y Estenoz-Mejia, 2020).

- *Humedad inicial y final de la mena laterítica*

La humedad inicial se considera una variable independiente y, a la vez, un parámetro de referencia por cuanto permite estimar la incidencia que tiene el secado natural en la humedad final del material. Su valor varía aleatoriamente porque depende de las condiciones meteorológicas de la región en el momento de la implementación del proceso y de las características hidrogeológicas del yacimiento en explotación (Blanco y Llorente, 2004; Ochoa, 2008; De Miguel, 2007, 2009; Carmenate *et al.*, 2009). Se experimentó con los valores que tenía la mena laterítica en el momento en que fue depositada (valores iniciales o de referencia), para ello se tomaron tres muestras en los taludes longitudinales de las pilas. Para la humedad final se realizaron determinaciones en los mismos puntos donde se hicieron las mediciones de la humedad inicial. Los valores de humedad inicial y final se calcularon mediante las ecuaciones 1-4 (Martínez-Pinillos, 1997).

$$H_{bh} = \frac{m_h}{m_0} = \frac{m_0 - m_s}{m_0} \quad (1)$$

$$H_{bs} = \frac{m_h}{m_s} = \frac{m_0 - m_s}{m_s} \quad (2)$$

Donde:

H_{bh} y H_{bs} - humedad del material base húmeda y seca, respectivamente (kg/kg); m_h - cantidad de agua en el material húmedo (kg); m_0 - masa inicial de material sin secar (kg); m_s - masa de la materia seca en el producto (kg).

Las humedades, expresadas en % kg/kg, se relacionan mediante las expresiones 3 y 4.

$$H^* = \frac{100 \cdot H}{1 + H} \quad (3)$$

$$H = \frac{H^*}{100 - H^*} \quad (4)$$

Donde:

H^* y H - humedad del material (% y kg/kg).

2.2.3. Variables meteorológicas

Para el monitoreo de estas variables se empleó el equipo *Davis EZ-Mount Groweather* que pertenece a la empresa niquelera comandante Ernesto Che Guevara. El equipo tiene un sistema de adquisición de datos, utiliza un conjunto de sensores que incluye la medición y registro en computadora, cada una hora, de las variables meteorológicas siguientes: radiación solar, nubosidad, precipitaciones, temperatura del punto de rocío, temperatura, humedad relativa, dirección y velocidad del aire. Estas variables tienen un comportamiento aleatorio por lo que no pudieron ser prefijadas para la experimentación. No obstante, sus valores reales fueron considerados en el momento en que se realizó la validación.

2.2.4. Tipo de diseño de experimentos empleado

Aunque en las investigaciones científicas pueden ser empleados diversos tipos de diseños de experimentos (Montgomery, 2004; Legrá, 2022), por las características del proceso estudiado y los recursos disponibles, se implementó un diseño multifactorial cuyas características se relacionan a continuación:

- Se realizaron mediciones en tres pilas de mena laterítica para descartar la influencia del proceso mecánico de formación de las pilas. Estas se orientaron longitudinalmente en la dirección del eje norte-sur para maximizar la captación de energía térmica (eólica y solar).
- Las muestras, para la medición de humedad de la mena laterítica, se tomaron en la superficie de las pilas, de esta manera se garantizan mediciones correctas con la instrumentación disponible.
- En cada pila se tomaron tres puntos de medición en diferentes cortes y para el análisis posterior se consideró el resultado promedio. Se procedió de esta forma debido a los pequeños valores puntuales y promedios obtenidos para el coeficiente de variación, los cuales fueron inferiores al 5 %. Lo anterior confirma la calidad de las mediciones realizadas y asegura que los resultados obtenidos en un corte sean extrapolables a cualquier otro corte de la pila (Figura 2).

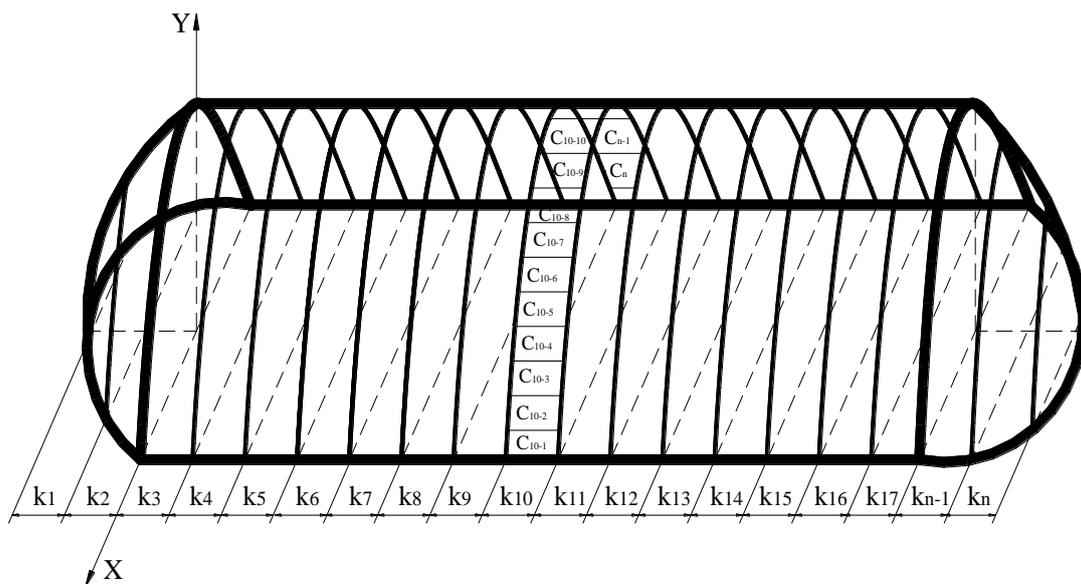


Figura 2. Representación de los cortes k_1, k_2, \dots, k_n y los sectores $C_{10-1}, C_{10-2}, \dots, C_n$ que se forman al dividir la superficie de captación solar de la pila de mena laterítica (Retirado-Mediaceja *et al.*, 2012a).

- Las mediciones antes mencionadas se realizaron durante 14 días consecutivos donde la variabilidad climática determinó un conjunto diverso de condiciones experimentales en lo que respecta a los valores de humedad inicial del material y los parámetros meteorológicos.
- Se realizaron mediciones en puntos equivalentes de ambos taludes de las pilas (este y oeste) para corroborar o descartar la existencia de uniformidad en el secado del material.

- No se consideraron pilas con sección transversal diferente a la triangular o ángulo de reposo diferente a 61 grados sexagesimales por motivos técnico-económicos. Sin embargo, esta simplificación no constituye un obstáculo para comprobar la veracidad de los modelos teóricos propuestos debido a su carácter físico y general (Retirado-Mediaceja y Legrá, 2011).

2.2.5. Matriz del diseño de experimentos y número de mediciones

En el diseño empleado se consideran como factores o variables independientes la distancia en el eje "X" medida simétricamente desde el origen de coordenadas (X_0 y X_E), la altura en el eje "Y" de la superficie de secado de la pila (Y_S), la distancia en el eje "Z" medida desde el origen de la superficie lateral de la pila (Z_1 , Z_2 y Z_3), y el tiempo medido a las 6 horas y las 18 horas (τ_0 y τ_F).

El parámetro de referencia lo constituye la humedad inicial de la laterita (H_0) y la variable dependiente es su humedad final (H_F). En la Tabla 2 se expone la matriz del diseño de experimentos implementado en la investigación.

Tabla 2. Matriz del diseño de experimentos implementado en cada pila

Mediciones de humedad a realizar en cada pila de laterita						
Día	X (m)	Z (m)	Tres muestras (Z1-Z3) y el valor promedio (P)			
			H₀(Z1)	H₀(Z2)	H₀(Z3)	H₀(P)
			H_F(Z1)	H_F(Z2)	H_F(Z3)	H_F(P)
			(%)	(%)	(%)	(%)
1	X_0	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(1)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(1)}$
2	X_E	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(2)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(2)}$
3	X_0	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(3)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(3)}$
4	X_E	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(4)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(4)}$
5	X_0	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(5)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(5)}$
6	X_E	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(6)}$
			$H_F(Z1)$	$H_F(Z2)$	$H_F(Z3)$	$H_{FP(6)}$
7	X_0	Z_{1-3}	$H_0(Z1)$	$H_0(Z2)$	$H_0(Z3)$	$H_{0P(7)}$

			$H_{F(Z1)}$	$H_{F(Z2)}$	$H_{F(Z3)}$	$H_{FP(7)}$
8	X_E	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(8)}$ $H_{FP(8)}$
9	X_O	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(9)}$ $H_{FP(9)}$
10	X_E	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(10)}$ $H_{FP(10)}$
11	X_O	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(11)}$ $H_{FP(11)}$
12	X_E	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(12)}$ $H_{FP(12)}$
13	X_O	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(13)}$ $H_{FP(13)}$
14	X_E	Z_{1-3}	$H_{0(Z1)}$ $H_{F(Z1)}$	$H_{0(Z2)}$ $H_{F(Z2)}$	$H_{0(Z3)}$ $H_{F(Z3)}$	$H_{0P(14)}$ $H_{FP(14)}$
Total: 84 mediciones experimentales						

Donde:

X_O y X_E - distancia en el eje "X" medida desde el origen hacia los taludes oeste y este (m); Z_1 , Z_2 , y Z_3 - distancia en el eje "Z" medida desde el origen de la superficie lateral de la pila (m); τ_0 y τ_F - tiempo inicial y final medido a las seis y las 18 horas del día (h); $H_{0(P)}$ y $H_{F(P)}$ - valor promedio de la humedad inicial y final de la laterita, determinado de forma experimental (%).

2.2.6. Suficiencia del muestreo y el análisis de varianza

Para comprobar la pertinencia práctica de los modelos teóricos establecidos para el cálculo de la humedad de la mena laterítica durante el proceso de secado natural se pueden realizar dos tipos de experimentos, ellos son:

- Determinar la humedad del material tomando muestras en la superficie de secado de las pilas.
- Determinar la humedad tomando muestras de material en la superficie de secado y en el interior (parte central) de las pilas.

Sin embargo, se debe puntualizar que cuando se somete al secado natural la mena laterítica, esta se compacta y forma una coraza prácticamente impenetrable que, según las investigaciones consultadas, dificulta sobremanera el muestreo en el interior de las pilas (Espinosa y Pérez, 2010a y 2010b; Vinardell, 2011). Este inconveniente determinó que en la validación

de los modelos teóricos se implementara mayoritariamente el primer experimento y en menor medida el segundo. En ambos casos, durante los experimentos, se homogenizó el material en las pilas para obtener valores promedios de humedad.

En relación con la necesidad de realizar o no un análisis de varianza (Guerra *et al.*, 2003), debe destacarse que en este caso concreto no se requiere inferir la ya conocida relación existente entre las variables espaciales (x , y , z) y la variable temporal (τ) con la humedad del material en cada punto espacial e instante de tiempo, lo anterior resulta evidente en la ecuación de $H(y, \tau)$ de la Figura 1. Por otra parte, en la investigación tampoco fue necesario establecer un modelo empírico para el cálculo de la humedad de la mena laterítica, por ejemplo, utilizando el Método de los Mínimos Cuadrados (Legrá, 2022), porque las mediciones experimentales realizadas tienen como único propósito confirmar la validez de los modelos teóricos obtenidos al resolver las ecuaciones diferenciales de conducción del calor y de la humedad con los problemas de contorno planteados para el proceso investigado.

2.2.7. Técnica experimental para la medición de la humedad

Se removió y homogenizó el material en las pilas con la finalidad de obtener valores promedios de humedad. Este parámetro se determinó por el método de diferencias de pesadas (Martínez-Pinillos, 1997) atendiendo a su confiabilidad, sencillez y fácil aplicación (Miranda, 1996).

Se tomaron muestras de dos kilogramos en la superficie de las pilas, en el horario de las seis de la mañana. Las muestras se trasladaron en recipientes herméticos hasta el laboratorio, se les determinó la masa en ese instante en una balanza digital (con rango de medición de 0 kg a 100 kg y error de 0,058 kg). Posteriormente se secaron, en una estufa marca MEMMERT (con rango de medición de 0 °C a 200 °C y error de $\pm 1\%$), a temperatura de 105 °C hasta que la masa de la muestra permaneciera constante (alrededor de 24 horas), luego se enfriaron en una desecadora, se determinó la masa de la muestra seca y se calculó la humedad inicial del material.

Simultáneamente las pilas de mena laterítica se expusieron al secado natural en el horario comprendido entre las 6 y las 18 horas y en este último horario se tomaron nuevamente muestras en los mismos puntos de muestreo, se repitió el procedimiento realizado en la mañana y se determinó la humedad final. Luego se comprobó el efecto que tuvo el proceso de secado natural en la humedad del material.

3. VALIDACIÓN DE LOS MODELOS

La validación de los modelos físico-matemáticos se realiza comparando los resultados experimentales obtenidos para la humedad del material [$H_{F(P)Exp}$], con los teóricos calculados con los modelos para las mismas condiciones del experimento [$H_{F(P)Teo}$]. Luego, se calculan los errores relativos puntuales y promedios entre los resultados experimentales y los teóricos, teniendo como criterio de aceptación que el error relativo promedio sea inferior a 10 % (Viera *et al.*, 1988). Se fija este valor y no uno menor (por ejemplo, inferior al 5 %) porque en la solución del problema de contorno planteado para el proceso de secado natural se desprecian la incidencia del drenaje y los efectos multidimensionales (2D y 3D) de la transferencia de calor y masa, lo cual son simplificaciones que limitan la precisión del modelo planteado (Çengel y Ghajar, 2015).

Para el cálculo de los errores se emplean las expresiones 5 y 6 propuestas por Miller *et al.* (2005). El diagrama general empleado en la validación experimental de los modelos se expone en la Figura 3.

$$E = \left| \frac{[H_{F(P)Exp.}] - [H_{F(P)Teo.}]}{H_{F(P)Exp.}} \right| \cdot 100 \quad (5)$$

$$E_P = \sum_{i=1}^{N_d} \left| \frac{[H_{F(P)Exp.}] - [H_{F(P)Teo.}]}{H_{F(P)Exp.}} \right| \cdot \frac{100}{N_d} \quad (6)$$

Donde:

E - error relativo puntual entre los valores experimentales y los teóricos de la humedad del material (%); $H_{F(P)Exp.}$ - valor promedio de la humedad del material determinado de forma experimental (%); $H_{F(P)Teo.}$ - valor promedio de la humedad del material determinado de forma teórica con los modelos (%); E_P - error relativo promedio entre los valores experimentales y los teóricos de la humedad (%); N_d - número de determinaciones (adimensional).

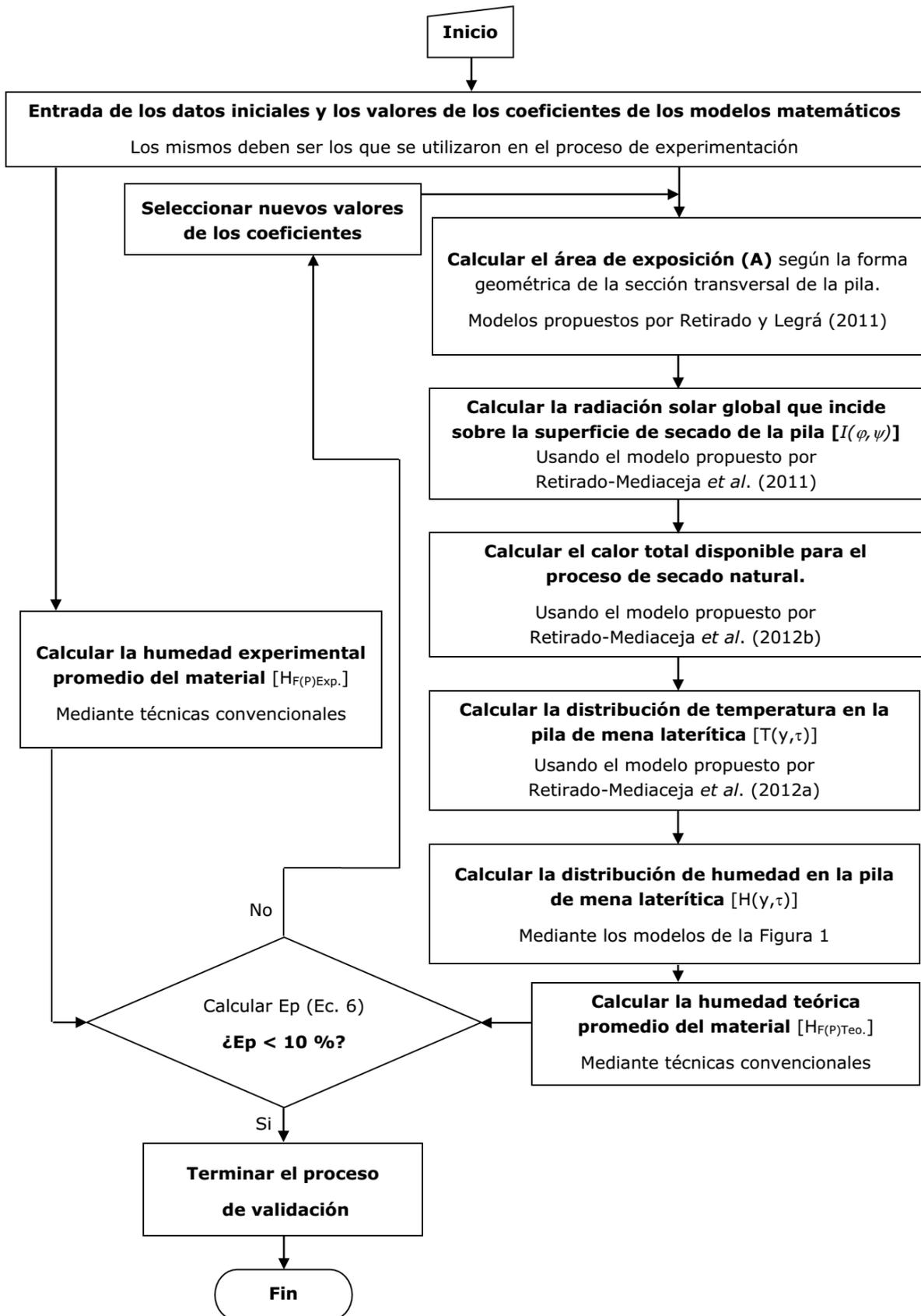


Figura 3. Diagrama para la validación de los modelos físico-matemáticos.

3.2. Resultados de la validación

En las Tablas 3 y 5 se relacionan los valores de la humedad de la mena laterítica obtenidos experimentalmente en las pruebas de secado natural y los valores teóricos calculados con los modelos matemáticos para las mismas condiciones del experimento. Los resultados experimentales [$H_{0(P)Exp.}$ y $H_{F(P)Exp.}$] son los promedios para las tres muestras analizadas. En las referidas tablas se observa que los errores relativos puntuales siempre fueron inferiores al 15 %, siendo el 73,81 % de ellos inferiores al 10 % (Tabla 4). El error relativo promedio, para cada una de las pilas, se encuentra por debajo del 8 % y el error relativo promedio considerando todas las determinaciones es igual a 6,57 %.

Tabla 3. Resultados experimentales y teóricos obtenidos para la humedad

Primera pila de mena laterítica									
Día	$H_{0(P) Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)	Día	$H_{0(P) Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)
1	34,05	27,81	29,61	6,48	8	38,04	31,06	34,06	9,66
2	32,07	29,46	27,40	6,99	9	31,42	26,21	26,66	1,72
3	31,48	27,02	26,74	1,04	10	36,93	30,62	32,82	7,18
4	34,81	30,29	30,46	0,56	11	31,36	25,15	26,60	5,77
5	31,72	27,90	27,00	3,23	12	27,73	22,61	22,55	0,27
6	35,13	30,81	30,81	0,00	13	25,63	19,61	20,20	3,01
7	32,45	30,68	27,82	9,32	14	35,31	29,51	31,02	5,12
Error relativo promedio entre los valores experimentales y teóricos ($E_p = 4,31$ %)									
Segunda pila de mena laterítica									
Día	$H_{0(P) Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)	Día	$H_{0(P) Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)
1	31,88	30,66	27,18	11,35	8	30,62	27,72	25,77	7,03
2	29,99	29,05	25,06	13,73	9	28,09	24,24	22,94	5,36
3	35,30	27,43	31,01	13,05	10	37,39	31,54	33,34	5,71
4	29,63	27,61	24,66	10,68	11	27,83	24,74	22,65	8,45
5	31,16	26,40	26,37	0,11	12	36,73	33,01	32,60	1,24
6	31,11	30,39	26,32	13,39	13	23,89	18,21	18,29	0,44
7	31,73	25,04	27,01	7,870	14	33,61	26,77	29,11	8,74
Error relativo promedio entre los valores experimentales y teóricos ($E_p = 7,65$ %)									
Valores de los factores del diseño de experimentos para las pilas 1 y 2									

$X_0 = +0,8$ m; $X_E = -0,8$ m; $Z_1 = 35$ m; $Z_2 = 70$ m; $Z_3 = 105$ m; $Y_s = 1,443$ m; τ_0 y $\tau_F = 0$ y 12 h

Tercera pila de mena laterítica

Día	$H_{0(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)	Día	$H_{0(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Exp}$ (%)	$H_{F(P)Teo}$ (%)	E (%)
1	36,32	30,61	33,88	10,68	8	33,05	27,50	30,36	10,40
2	36,61	33,89	34,19	0,89	9	33,96	27,42	31,34	14,30
3	35,50	32,11	33,01	2,80	10	34,94	30,85	32,40	5,02
4	42,77	36,56	40,77	11,52	11	32,22	27,75	29,47	6,20
5	39,80	34,68	37,61	8,45	12	22,74	18,38	19,18	4,35
6	34,23	30,54	31,63	3,57	13	29,02	22,67	26,01	14,73
7	36,99	33,93	34,60	1,97	14	25,07	19,13	21,71	13,49

Error relativo promedio entre los valores experimentales y teóricos ($E_p = 7,74$ %)

Error relativo promedio entre los valores experimentales y teóricos

$X_0 = +1,372$ m; $X_E = -1,372$ m; $Z_1 = 35$ m; $Z_2 = 70$ m; $Z_3 = 105$ m; $Y_s = 2,476$ m; τ_0 y $\tau_F = 12$ h

Estos valores indican que existe una correspondencia satisfactoria entre los resultados de la humedad obtenidos experimentalmente durante el secado natural y los valores teóricos calculados con los modelos establecidos. Los errores relativos puntuales calculados para cada uno de los niveles de humedad relacionados en la Tabla 3 obedecen a la distribución que se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Distribución de los errores relativos puntuales

Pila de laterita 1		Pila de laterita 2		Pila de laterita 3	
Intervalo (%)	PRE (%)	Intervalo (%)	PRE (%)	Intervalo (%)	PRE (%)
$0 \leq E \leq 5$	50	$0 \leq E \leq 5$	21,43	$0 \leq E \leq 5$	35,71
$5 < E \leq 10$	50	$5 < E \leq 10$	42,86	$5 < E \leq 10$	21,43
$10 < E \leq 15$	0,0	$10 < E \leq 15$	35,71	$10 < E \leq 15$	42,86

Distribución del error relativo puntual para las tres pilas juntas

$0 \leq E \leq 5$ (PRE = 35,71 %)	$5 < E \leq 10$ (PRE = 38,10 %)	$10 < E \leq 15$ (PRE = 26,19 %)
--------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------

Donde:

PRE - porcentaje que representan los errores que se encuentran en el intervalo considerado (%).

Teniendo en cuenta el ajuste global del 93,43 % (100-6,57 %) alcanzado con los modelos establecidos para el cálculo de la humedad del material, la distribución de los errores relativos puntuales calculados y sus pequeños valores promedios (Tablas 3-5), se puede aseverar que los modelos físico-matemáticos establecidos para el análisis energético del proceso de secado natural de la mena laterítica tienen una exactitud aceptable para los cálculos de ingeniería térmica (superior al 90 %) y, por tanto, son válidos para los fines para los cuales fueron creados.

Al respecto, la literatura que aborda la modelación matemática de procesos industriales específica que para la mayoría de los cálculos de ingeniería (excepto en los procesos e instalaciones que por sus características intrínsecas requieren alta precisión en los cálculos, por ejemplo: reactores nucleares) una aproximación del 90 % se considera satisfactoria, debido a que los resultados siempre están influenciados por los errores inherentes al proceso de experimentación (Tijonov, 1978; Lucenko, 1984).

Tabla 5. Resultados experimentales y teóricos obtenidos para la humedad de la mena laterítica a diferentes profundidades

Profundidad a la cual se midió la humedad del material (m)	Talud Este de la pila de minerales			
	6:00 h		18:00 h	
	H _{0(P) Exp} (%)	H _{F(P)Exp} (%)	H _{F(P)Teo} (%)	E (%)
Superficie (0,0)	32,46	27,59	28,44	3,08
(-0,3)	32,46	28,15	28,93	2,77
(-0,6)	32,46	28,37	29,42	3,70
(-0,9)	32,46	29,22	29,91	2,36
(-1,2)	32,46	29,43	30,41	3,33
(-1,5)	32,46	32,18	30,90	3,98
Profundidad a la cual se midió la humedad del material (m)	Talud Oeste de la pila de minerales			
	6:00 h		18:00 h	
	H _{0(P) Exp} (%)	H _{F(P)Exp} (%)	H _{F(P)Teo} (%)	E (%)
Superficie (0,0)	32,46	26,09	26,25	0,61

(-0,3)	32,46	26,61	27,01	1,50
(-0,6)	32,46	27,17	27,76	2,17
(-0,9)	32,46	28,19	28,52	1,17
(-1,2)	32,46	30,04	29,28	2,53
(-1,5)	32,46	30,91	30,04	2,81

Error relativo promedio entre los valores experimentales y teóricos de la humedad de la laterita ($E_p = 2,50 \%$)

Observación: la profundidad se midió desde la superficie a la base de pila.

Finalmente resulta loable destacar que, de acuerdo con los resultados de los dos experimentos, en la superficie y el interior de las pilas (Tablas 3 y 5), los modelos responden satisfactoriamente a la realidad física del proceso. Sin embargo, se reconoce que su alcance es limitado por tratarse de modelos unidimensionales (1D) que intentan explicar un fenómeno físico multidimensional de transporte de calor y masa (secado en 2D y 3D) que tiene lugar en un volumen de control (la pila de mineral). Por tanto, las próximas investigaciones estarán orientadas a desarrollar y validar la modelación bidimensional del proceso objeto de estudio.

4. CONCLUSIONES

- La implementación de un diseño de experimentos multifactorial posibilita la validación experimental de los modelos físico-matemáticos establecidos para el análisis energético del proceso de secado natural de la mena laterítica. Los resultados evidencian una correspondencia satisfactoria entre los valores de humedad del material determinados experimentalmente y los teóricos calculados con los modelos, para condiciones de implementación semejantes.
- La validación experimental corrobora que los modelos del secado natural de la mena laterítica describen la realidad física del proceso con elevada precisión (93,43 %). Esta puede ser mejorada a través de la modelación multidimensional (2D y 3D) de los procesos de transferencia de calor y masa que caracterizan al objeto de estudio. Este relevante aspecto será objeto de análisis en futuras investigaciones.

5. REFERENCIAS

Bergues-Ricardo, C. & Díaz-López, J. (2014). Diagramas de tendencia para la generalización sostenible de secadores solares directos de productos agropecuarios. *Tecnología Química*, 34(2), 143-151. Disponible en: <http://revistas.uo.edu.cu/index.php/tq>.

- Blanco, J. & Llorente, G. (2004). *Informe técnico sobre investigaciones ingeniero-geológicas e hidrogeológicas de la Base Minera Punta Gorda*. Holguín: INRH. 54 p.
- Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. & Arias-De Tapia, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2), 129-139.
- Carmenate, J., Rodríguez, R. & Linares, R. (2009). *Interfaz agua-aire en los suelos lateríticos de la región de Moa*. En: 3ra Convención cubana de Ciencias de la Tierra. La Habana.
- Çengel, Y. A. & Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*. 5th Edition. New York, USA: McGraw-Hill Education. 1208 p.
- Choubey, P., Sinhmar, H., & Tiwari, S. (2025). A review on machine learning assisted solar drying system with phase change material. *Journal of Energy Storage*, 119, 116403. <https://doi.org/10.1016/j.est.2025.116403>
- De Miguel, C. (2007). *Influencia de procesos hidrogeológicos en la formación y posterior enriquecimiento mineral de yacimientos cobalto-niquelíferos en lateritas*. En: Memorias del II Congreso Cubano de Minería. La Habana.
- De Miguel, C. (2009). *Cálculos del drenaje y efecto económico en yacimientos hierro-cobalto-niquelíferos en lateritas con ejemplo del yacimiento Punta Gorda en Moa, Cuba*. En: Memorias del III Congreso Cubano de Minería. La Habana.
- Espinosa, M. & Pérez, N. (2010a). *Evaluación del estado técnico de las muestras extraídas y depositadas en áreas de la mina de la empresa Ferroníquel Minera, para los trabajos de secado solar y homogenización*. Informe de investigación presentado en el Consejo Técnico de la empresa Ferroníquel Minera SA. 30 p.
- Espinosa, M. & Pérez, N. (2010b). *Resultados obtenidos en pruebas de secado solar realizadas por el Centro de Investigaciones del Níquel a la empresa Ernesto Che Guevara*. Informe de investigación presentado en el Consejo Técnico de la empresa Ferroníquel Minera SA. 20 p.
- Estenoz S.; Alderí, A., Batista, N. & Donatién, A. (2005). *Resultados en la industria minera del secado solar y la homogeneización de minerales en pilas a la intemperie*. Santiago de Cuba. En: Memorias en CD del Evento CIEMA '05, noviembre 8-11. ISBN 959-2007-198-5.
- Estenoz, S. & Espinosa, M. (2003). *Procedimiento y equipo para secado solar de materiales a la intemperie*. OCPI. Cuba, patente de invención No. 175.

- Estenoz, S. & Espinosa, M., Pérez, N. (2004). *Uso de energías renovables en la industria cubana del níquel*. En: Memorias del evento CUBASOLAR. Guantánamo.
- Estenoz, S. (2001). Desarrollo sostenible en la minería a través del aprovechamiento integral de los yacimientos lateríticos. *Tecnología Química*, 21(3), 54-60.
- Estenoz, S. (2009). *Sistema integral de explotación minera para desarrollo sostenible de recursos naturales y su procesamiento tecnológico. Casos de estudio*. En: Memorias del III Congreso Cubano de Minería. La Habana.
- Estenoz, S., Alderí, A., Batista, N., Donatién, A. & Pérez, N. (2007b). *Aplicación del secado solar y la homogeneización en la industria niquelífera Comandante Ernesto Che Guevara*. En: II Congreso Cubano de Minería. La Habana.
- Estenoz, S., Alderí, A., Reyes, A., Lovaina, Y. & Pinto, H. (2007a). *Uso racional de los recursos con la explotación de los depósitos de estabilización de la calidad en la empresa Ernesto Che Guevara*. En: II Congreso Cubano de Minería. La Habana.
- Estenoz, S., Pérez, N. & Ramírez, I. (2006). *Secado solar y homogeneización de minerales a la intemperie en la industria cubana del níquel*. En: Memorias del evento CUBASOLAR. Villa Clara.
- Fuentes, B. & Estenoz-Mejía, S. (2020). Comportamiento del secado solar de lateritas a la intemperie en condiciones de clima húmedo tropical. *Holos*, 7, 1-14.
- Guerra, C., Menéndez, A., Barrera, R. & Egaña, E. (2003). *Estadística*. La Habana: Félix Varela. 376 p.
- Javaherdeh, H.; Deylami, M.; Hanifi, K. & Naghashzadegan, M. (2006). Drying characteristics of Banana: Theoretical modelling and experimental verification. *Journal of Food Engineering*, 15(3), 1-7.
- Jiménez, H. (1999). *Modelamiento matemático de los procesos de transferencia de momentum, calor y masa en medios porosos*. (Tesis Doctoral, Universidad Autónoma Metropolitana). 289 h.
- Karadirek, I. E., Erkaya, O. & Ciggin, A. S. (2025). Comparative life cycle assessment of sewage sludge drying by solar and thermal drying technologies. *Waste Management*, 201, 114826. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2025.114826>
- Legrá, A. & Silva, O. (2011). *La investigación científica: Conceptos y Reflexiones*. La Habana: Félix Varela. 445 p.

- Legrá, A. (2022). *Elementos teóricos y prácticos de la investigación científico-tecnológica*. La Habana: Félix Varela. 456 p.
- Lucenko, B. (1984). *Modelación matemática de los procesos tecnológicos químicos en máquinas analógicas*. Moscú: Izdat. 359 p.
- Martínez-Pinillos, E. (1997). Diseño y ensayo de un secador solar para madera. *Madera y Bosques*, 3(2), 13–28.
- Miller, I.; Freund, J. & Jonson, R. (2005). *Probabilidades y estadísticas para ingenieros*. La Habana: Félix Varela. 2 t.
- Miranda, J. (1996). Composición y conjugación de métodos de determinación de humedad de la industria del Níquel. *Minería y Geología*, 13(2), 39-45. Consultado: 19/05/2025. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Montgomery, D. (2004). *Diseño y análisis de experimentos*. La Habana: Félix Varela. 325 p.
- Montoya, J. & Jiménez, E. (2006). Determinación de la curva de secado al aire libre mediante modelación matemática y experimental de la Guadua Angustifolia Kunth. *Scientia et Technica*, 12(30), 415-419.
- Morya, P., Agarwal, M. & Agarwal, G. D. (2025). A comprehensive insight into solar drying systems for agricultural and industrial applications. *Solar Energy*, 293, 113494. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2025.113494>
- Nnamchi, O. A., Tom, C. N., Godwin, A., Umunna, M. F., Offiong, U. D., Mathew, I. & Ndukwu, M. C. (2025). Solar Dryers: A review of mechanism, methods and critical analysis of transport models applicable in solar drying of product. *Green Energy and Resources*, 100118. <https://doi.org/10.1016/j.gerr.2025.100118>
- Ochoa, Y. (2008). *Argumentación hidrogeológica y cálculos del drenaje del yacimiento cobalto-niquelífero Yagrumaje Norte*. Informe de investigación. ISMMM. 50 h.
- Odoi-Yorke, F., Davis, J. E., Nyarkoh, R., Abbey, A. A., Agyekum, E. B., Lamptey, F. P. & Atepor, L. (2025). A review of research trends, innovations, and future directions in phase change materials for energy storage in solar drying systems: A bibliometric approach. *Journal of Energy Storage*, 118, 116233. <https://doi.org/10.1016/j.est.2025.116233>
- Pandey, S., Kumar, A. & Sharma, A. (2024). Sustainable solar drying: Recent advances in materials, innovative designs, mathematical modeling, and energy storage solutions. *Energy*, 132725. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2024.132725>

- Parra-Coronado, A.; Roa-Mejías, G. & Oliveros-Tascón, C. (2008). Modelamiento y simulación matemática en el secado mecánico de café pergamino. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, 12(4), 415-427.
- Polyanin, A. D.; Manzhirov, A. V. (2022). *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC. FL, USA: Taylor & Francis Group. 1543 p.
- Rao, B., Zhao, T., Tu, H., Zhang, Y., Yu, S., Cheng, S., & Zhou, F. (2025). Mechanistic exploration of activated carbon synergistic solar drying through theoretical analysis coupled with experimental validation. *Waste Management*, 197, 50-60. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2025.02.024>
- Retirado-Mediaceja, Y. & Legrá, A. (2011). Modelación matemática del área de exposición y del volumen de las pilas de menas lateríticas expuestas a secado solar natural. *Minería y Geología*, 27(2), 84-108. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y. (2012). *Modelación matemática del proceso de secado natural de las menas lateríticas*. (Tesis doctoral, Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa). 183 h.
- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá-Lobaina, A. A., Laurencio-Alfonso, H. L., Gilbert-Hernández, A., Zalazar-Oliva, C., Osorio-Laurencio, L. & Gresesqui-Lobaina, E. (2017). Aplicación informática basada en modelos matemáticos del secado natural de la mena laterítica. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*, 11(2), 102-116. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá, A., Lamorú, M., Torres, E. & Laurencio, H. (2012a). Optimización del secado solar de la mena laterítica en la industria cubana del níquel. *Minería y Geología*, 28(2), 30-46. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá, A., Lamorú, M., Torres, E., Laurencio, H. & Góngora, E. (2012b). Modelación y simulación del proceso de secado natural de la mena laterítica. *Minería y Geología*, 28(4), 1-19. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá, A., Lamorú, M., Torres, E., Laurencio, H. & Góngora, E. (2014). Distribución de temperatura en pilas de mena laterítica expuestas a secado natural. *Minería y Geología*, 30(1), 33-50. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.

- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá, A., Lamorú, M., Torres, E., Laurencio, H. & Góngora, E. (2015) Velocidad de secado en pilas de mena laterítica almacenadas a la intemperie. *Minería y Geología*, 31(3), 45-61. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y., Laurencio-Alfonso, H. L., Salazar-Corrales, M. F., León-Segovia, M. A., León-Segovia, M. A., Falconí-Borja, M. A. & Vega-Peñafiel, J. P. (2018). Perfeccionamiento de la tecnología de secado natural de la mena laterítica. *Minería y Geología*, 34(2), 195-209. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Retirado-Mediaceja, Y., Legrá, A., Gilbert, A., Salazar, E., Salazar, J. & Mendoza, M. (2016). Influencia de la inclinación de las pilas en el secado natural de la mena laterítica. *Minería y Geología*, 32(3), 113-127. Disponible en: www.ismm.edu.cu/revistamg.
- Salinas, C., Ananías, R. & Ruminot, P. (2008). Modelación fenomenológica de las curvas de secado por alta temperatura de Pino Radiata. *Maderas, Ciencia y tecnología*, 10(3), 207-217.
- Sandoval-Torres, S. (2009). Modelación matemática del secado convencional de madera. *Madera y Bosques*, 15(1), 75-89.
- Tijonov, O. (1978). *Modelos matemáticos sencillos en los procesos metalúrgicos (idioma ruso)*. San Petersburgo: Instituto de Minas. 398 p.
- Viera, R., López, S. & Noemí, M. (1988). *Modelación matemática para ingenieros químicos*. La Habana: Pueblo y Educación. 240 p.
- Vinardell, J. (2011). *Implementación del secado solar natural de las menas lateríticas en las empresas niquelíferas cubanas*. (Tesis de Maestría, Universidad de Moa). 63 h.
- Xu, G. & Liu, H. (2025). Efficiency Analysis of Solar Drying System Integrated with Flat-plate Solar Collector and Thermal Storage Units. *Renewable Energy*, 122569. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2025.122569>

Información adicional

Conflicto de intereses

Los autores declaran que no existen conflictos de intereses.

Contribución de autores

YRM: Realiza la revisión bibliográfica; diseña y escribe el artículo propuesto. Participó en la formalización de los modelos, el análisis de los resultados, redacción del borrador del artículo, la revisión crítica de su contenido y en la aprobación de la versión final del manuscrito. **AALL:** concepción general y ejecución de la investigación, análisis matemático del objeto de estudio y formalización de los modelos, escritura y revisión crítica, aprobación de la versión final del

manuscrito. **YCM**: análisis de los resultados, escritura, revisión crítica y aprobación final del manuscrito. **HLLA**: búsqueda bibliografía, análisis de los resultados, revisión crítica y aprobación final del manuscrito. **MFSC**: búsqueda bibliografía, análisis de los resultados y revisión del informe final. **WGQS**: búsqueda bibliografía, análisis de los resultados y revisión del informe final.

ORCID

YRM, <https://orcid.org/0000-0002-5098-5675>

AALL, <https://orcid.org/0000-0002-4793-4754>

YCM, <https://orcid.org/0000-0003-2287-7519>

HLLA, <https://orcid.org/0000-0003-2688-015X>

MFSC, <https://orcid.org/0000-0003-1785-1568>

WGQS, <https://orcid.org/0000-0001-9430-2082>

Recibido: 25/05/2025

Aceptado: 05/06/2025