7. PYATNITSKY, I. V. y otros: "Extracción de aminocomplejos de metales con ácidos monocarboxílicos alifáticos". Revista Anal. Quím., 26, 1247, 1971 (en ruso).

8. SUKHAN, V. V. y otros: "Extracción de aminocomplejos de metales con ácidos monocarboxílicos alifáticos". Revista Anal. Quím., 29, 1690, 1974 (en ruso).

9. SUKHAN, V. V. y otros: "Extracción de aminocomplejos de metales con ácidos monocarboxílicos alifáticos". Revista Anal. Quím., 28, 541, 1973 (en ruso).

10. SUKHAN, V. V. y otros: "Extracción de aminocomplejos de metales con ácidos monocarboxílicos alifáticos". Revista Anal. Quím., 29, 1278, 1974 (en ruso).

11. PYATNITSKY, I. V.: "Extracción de aminocomplejos de metales con ácidos monocarboxílicos alifáticos". Revista Anal. Quím., 29, 2186, 1974 (en ruso).

12. NAKANISHI, KOJI: Infra-red Absorption Spectroscopy Practical. Halden-Day, Inc., San Francisco and Naukodo Comp. Ltd., Tokyo, 1964.

13. SANDELL, E. B.: Colorimetric Determination of Traces of Metals, third edition, Interscience Publishers Ltd., 415-420, 665-674, New York, 1959.

14. HERNANDEZ, B. y otros: "Estudio de la distribución de níquel(II) y cobalto(II) con mezclas de ácidos y amines". Dpto. Química Inorgánica y Analítica, Universidad Central (Archivo).

CDU 532.7:532.2/.4 (729.1)

SOLUCIONES APROXIMADAS DEL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO TURBULENTO DE FLUIDOS HETEROGENEOS, VISCOSOS E INCOMPRESIBLES

RESUMEN

En el trabajo se obtienen soluciones aproximadas del problema del flujo de líquidos con partículas sólidas en suspensión a partir de las ecuaciones generales del movimiento turbulento de Reynolds, para lo cual se ha considerado el flujo como un movimiento simultáneo de capas de líquidos homogéneos de diferentes densidades en el que se conserva la continuidad de la función promediada de la velocidad en toda la vertical.

Con la ayuda de la teoría matemática dimensional se obtiene un perfil logarítmico desplazado para la distribución de las velocidades promediadas en la sección transversal del flujo, y en particular para el movimiento de líquidos heterogéneos con una superficie libre, y sobre esta base se determina el gasto.

Puede obtenerse un perfil similar mediante las teorías semiempíricas de turbulencia.

En el trabajo se analizan también las ecuaciones exactas del movimiento de líquidos heterogéneos.

У.Д.К. 532.7:532.2/.4 (729.I)

ПРИБЛИЖЁННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ, ВЯЗКОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Резюме

В данной работе получены приближённые решения задачи истечения жидкости со взвешенными твёрдыми частицами на основе общих уравнений турбулентного движения Рейнольдса, для чего поток был принят как одновременное движение слоёв однородных жидкости разных плотностей, в котором сохраняется непрерывность фунции осреднённых скоростей по вертикальному сечению.

С помощью математической теории размерностей получен сдвинутый логарифмический профиль для распределения осреднённых скоростей в поперечном сечении потока и, в частности, для движения неоднородных жидкостей со свободной поверхностью. На этой основе был определён расход.

К аналогичному профилю можно подойти исходя из полуэмпирической теории турбулентности.

В работе, также, проведен краткий анализ точных уравнений движения неоднородной жидкости.

SOLUCIONES APROXIMADAS DEL PROBLEMA DEL MOVIMIENTO TURBULENTO DE FLUIDOS HETEROGENEOS, VISCOSOS E INCOMPRESIBLES

Ing. Rafael Pérez Barreto, Candidato a Doctor
Profesor Titular del ISMMMoa

La solución exacta del problema del movimiento turbulento de fluidos viscosos e incompresibles no existe. Se han obtenido expresiones logarítmicas para la distribución de las velocidades medias en las secciones transversales circulares de flujos de líquidos homogéneos que permiten, consecuentemente, determinar el gasto, concuerdan con bastante aproximación con los datos experimentales cuando se eligen adecuadamente las magnitudes constantes y mantienen su valor práctico independientemente de la inconsistencia física de las suposiciones mediante las cuales fueron halladas. Tiene especial importancia metodológica y también valor práctico esta misma solución para flujos con una superficie libre.

Posteriormente estos resultados se han obtenido con la ayuda de la teoría matemática dimensional o con procedimientos de la matemática estadística [1], lo que evita la necesidad de suposiciones físicas de fundamentación discutible.

En el presente trabajo se obtienen soluciones aproximadas del problema del flujo de líquidos heterogéneos a partir de las ecuaciones generales del movimiento turbulento de Reynolds y en el caso particular de flujos con una superficie libre y se analizan brevemente las ecuaciones del movimiento turbulento de líquidos con partículas sólidas en suspensión.

En el caso de líquidos heterogéneos el esquema de flujo turbulento se complica aún más por la presencia de partículas sólidas en suspensión, y para obtener soluciones a partir de las ecuaciones de Reynolds se hace necesario introducir admisiones que simplifiquen el sistema lo que les da el carácter aproximado a las mismas [2] .

En el movimiento de pulpas con velocidades cercanas a la crítica, las partículas sólidas suspensas en el torrente líquido se distribuyen irregularmente en su sección transversal. Reiteradas observaciones demuestran que en estos flujos se forman capas de diferentes densidades cuyos límites son fáciles de determinar: dependen del tipo, forma y tamaño del material transportado y también de la concentración y velocidad media de la mezcla en movimiento.

Si las partículas sólidas se distribuyen estacionariamente los procesos de caída incesante y de ascenso transversal de las mismas se compensan mutuamente. En este caso el flujo se puede considerar un movimiento simultáneo de capas de líquidos de diferentes densidades. Al mismo tiempo se conserva la continuidad de la función promediada de la velocidad en toda la vertical del torrente, es decir, estas zonas están tan ligadas entre sí que sus velocidades promediadas en la línea de separación son iguales. Para esto deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} U_i = U_{i+1} \\ K_i \dfrac{\partial U_i}{\partial y} = K_{i+1} \dfrac{\partial U_{i+1}}{\partial y} \end{array}\right\} \text{ en } L_{i;i+1} \qquad (1)$$

donde:

U_i; U_{i+1} - valores promediados de las velocidades de las distintas capas de líquidos

$L_{i;i+1}$ - línea de separación de las capas

$K_{i;i+1}$ - constantes para cada capa

$$K_i = \frac{C_i}{A_i\, V_i}$$

donde:

C_i - coeficiente de KARMAN

A_i - constante que determina la continuidad de la función de la velocidad de la línea de separación

V_i - velocidad dinámica para cada capa

De esta forma el movimiento que se analiza se considera como un flujo estratificado de líquidos de distintas densidades, los cuales con cierta aproximación se pueden considerar homogéneos en el interior de cada capa. Esta suposición se confirma en la práctica, donde los límites de las capas se pueden establecer a partir de la curva experimental de la distribución de la concentración.

Suponiendo que el movimiento medio es:

1- rectilíneo, entonces:

$$U_{ix} \equiv U_i \; ; \quad U_{iy} \equiv 0 \; ; \quad U_{iz} \equiv 0$$

2- plano, entonces:

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} \equiv 0$$

3- estacionario, entonces:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \equiv 0 \qquad U_{ix} = U_i(y)$$

Además, si se supone un campo de pulsaciones plano paralelo, al igual que para los líquidos homogéneos, se tiene:

$$\omega'_i \equiv 0 \qquad \frac{\partial U'_i}{\partial z} \equiv 0 \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} \equiv 0$$

donde:

ω; U'; V' - proyecciones del vector de la velocidad de pulsación

x; y; z - coordenadas medias del sistema de cálculo

En este caso se anulan seis de los nueve componentes del tensor de tensiones pulsatorios.

Además, si se desprecia la acción de las fuerzas de masa teniendo en cuenta las admisiones anteriores y actuando de la misma forma que se hace para un líquido homogéneo [4] se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento promedio para fluidos heterogéneos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \overline{P}_{ix}}{x} &= \mu i \frac{\partial^2 U_i}{\partial y} + \frac{\partial P_{ixx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ixy}}{\partial x} \\ \frac{\partial \overline{P}_{iy}}{\partial y} &= \frac{\partial P_{ixy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ixy}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

donde:

$\frac{\partial \overline{P}_{ix}}{\partial x}$; $\frac{\partial \overline{P}_{iy}}{\partial y}$ - caída promedio de presión en los ejes x, y para cada i-capa

μi - coeficiente de viscosidad absoluta de la mezcla

U_i - velocidad media de cada i-capa del flujo

P_{ixx}; P_{ixy} - componentes medios del tensor de tensiones de cada i-capa

Admitiendo que las pulsaciones tangenciales son constantes en el interior de cada capa, lo que se ha confirmado experimentalmente para líquidos homogéneos [1], entonces, para regiones suficientemente alejadas de las paredes, donde se puedan despreciar las fuerzas de viscosidad, de la primera ecuación del sistema (2) se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial y} = \frac{\partial P_{ix}}{\partial x} \qquad (3)$$

donde:

τ_i - tensión tangencial media, constante para cada capa

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3) se obtiene un grupo de expresiones lineales para las tensiones tangenciales de cada capa

$$\tau_i = \frac{\partial \overline{P}_{ix}}{\partial x} y + C'_i$$

donde:

C'_i - constante de integración dentro de cada capa

Para esto se admitió que la caída de presión media dentro de cada capa depende sólo de la ordenada Y. Esta conclusión resulta del segundo grupo de ecuaciones del sistema (3).

Por otra parte:

$$\tau_i = \rho_i \, \nu_i \frac{\partial U_i}{\partial x} - \rho_i \overline{U_i V_i} \qquad (4)$$

donde:

ρ_i - densidad de la mezcla en cada capa

ν_i - viscosidad cinemática en cada capa

U_i; V_i - proyecciones de las pulsaciones de las velocidades medias en los ejes x, y

Para regiones suficientemente alejadas de las paredes:

$$\rho_i \, \nu_i \, \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0$$

entonces:

$$\tau_i = - \rho_i \, U_i V_i \qquad (5)$$

Para esto se admitió la continuidad del campo de pulsación de las velocidades en toda la sección del flujo, así como la igualdad de las pulsaciones en las líneas de separación, al igual que se hizo para las velocidades medias (1).

La solución general del sistema de ecuaciones (5) se puede representar a través de las funciones de la velocidad $f(U_i)$, entonces:

$$\tau_i = - \rho f \left[U_i(y) \right]$$

Tratemos de obtener las funciones $f(U_i)$ con la ayuda del cálculo dimensional. Teniendo en cuenta que en las regiones suficientemente alejadas de las paredes los cambios de la velocidad media no dependen de la viscosidad, por tanto ellas deben ser funciones de los parámetros τ_{oi}; ρ_i; y, entonces:

$$\frac{\partial U_i(y)}{\partial y} = f(\tau_{oi};\ \rho_i;\ y)$$

donde:

τ_{oi} - tensiones tangenciales en las líneas de separación o en las paredes

Hallando la relación que conserve las condiciones dimensionales, se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{\partial U_i(y)}{\partial x} = C_i \frac{V_i}{y} \qquad (6)$$

integrando el sistema (6) se obtiene:

$$U_i(y) = \sum_{i=1}^{n} C_i \, V_i \ln y + B_i \qquad (7)$$

Para hallar el valor de la constante A_i y B_i tenemos de (1)

$$\left.\begin{aligned} & U_i(y) = U_{i+1}(y) \\ & \frac{C_i}{A_i V_i} \frac{\partial U_i(y)}{\partial y} = \frac{C_{i+1}}{A_{i+1} \, V_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}(y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

además, cuando

$$\begin{aligned} & y = \delta \\ & U_1 = \frac{V_1}{\nu_1} \delta \end{aligned} \qquad (9)$$

donde:

δ - altura de la capa límite

Además, es necesario una magnitud lineal característica, la cual en el caso del movimiento de líquidos con una superficie libre sería la profundidad del flujo H, entonces:

$$U_n(H) = U_{max} \qquad (10)$$

cuando

$$y = H$$

de (10), (9), (8) y (7) se obtiene:

$$A_n = \frac{U_{max} - B_i}{V_n \ell n\, H} \qquad A_i = V_i \rho - B_i \nu_i$$

$$A_i = A_{i+1} \quad \frac{V_{i+1}}{V_1} \quad \frac{C_i}{C_{i+1}}$$

$$B_i = B_{i+1} \quad - \ell n\, h_i \quad \left(\frac{A_i V_i}{C_i} - \frac{A_{i+1} \quad V_{i+1}}{C_{i+1}}\right)$$

En las regiones cercanas a la pared lisa cuando $y \leqslant \delta$ se tiene:

$$\rho_i \, U_i \, V_i = 0 \tag{11}$$

entonces de (11) y (4) se tiene:

$$\tau_i = \rho_i \nu_i \quad \frac{\partial U_i}{\partial y} = \text{const} \tag{12}$$

integrando (12) en la región $0 \leqslant y \leqslant \delta$ se obtiene la expresión:

$$U_1 = V_1^2 / \nu_1 \, \delta$$

La relación (13) es bien conocida y se ha utilizado con el fin de obtener el valor de las constantes contenidas en el sistema de ecuaciones (7).

Teniendo en cuenta (13) para la región $0 \leqslant y \leqslant H$ se obtiene:

$$U_i \, (y) = \frac{V_1^2}{\nu_1} \delta + \frac{A_i}{C_i} V_i \, \ell n \, y + B_i$$

En el caso del flujo con una superficie libre es fácil determinar el gasto en la región

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \iint \bar{U}_i \, (y) \, dy \, dx$$

es decir:

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \int_0^{\delta} \frac{V_1^{\,2}}{\nu_1} \, \partial y + \int_{h_{i-1}}^{n_i} \left(\frac{A_i \, V \, \ell n \, y}{C_i} + B_i\right) \partial y$$

de donde, integrando se obtiene:

$$Q = \frac{V_1^{\,2}}{\nu_1} \delta + \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i V_i}{C_i} \left(h_i \, \ell n \, h_i - h_{i-1} \quad \ell n \, h_{i-1}\right) +$$

$$+ B_i \, (h_i - h_{i-1})$$

La velocidad media del flujo será:

$$\bar{U} = \frac{Q}{H}$$

es decir:

$$\bar{U} = \frac{V_1^{\,2}}{\nu_1 H} \delta + \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i B_i}{C_i} \left(h_i \, \ell n \, h_i - h_{i-1} \quad \ell n \, h_{i-1}\right) +$$

$$+ B_i \, (h_i - h_{i-1})$$

En la deducción de la expresión (7) no se utilizarán las magnitudes características que siempre se tiene en los casos de movimiento de canales y conductores.

En el movimiento estacionario en tubos o canales lisos cualquier velocidad del flujo se determina por el gradiente de presión. De tal manera la velocidad promediada en la capa dependerá de los parámetros τ_o; ρ; ν; y; H - magnitud característica que puede ser la profundidad del flujo o el radio del tubo y además depende de algunas de las velocidades conocidas. Por analogía con la misma deducción para líquidos homogéneos (1) tomamos la velocidad dinámica como parámetro determinado por el gradiente de presión, entonces:

$$\overline{U}_i = V_i \varphi\left(\frac{V_i H}{\nu} ; \frac{y}{H}\right) \tag{14}$$

Al igual que para líquidos homogéneos el perfil de la velocidad media se determina como función de dos variables. En el caso de grandes valores de H, en zonas suficientemente alejadas de las paredes, se pueden despreciar las fuerzas de viscosidad. En este caso la variación del gradiente de velocidad tendrá lugar por la siguiente ley:

$$\frac{\partial U_i\,(y)}{\partial y} = \frac{V_i}{H}\,\varphi'\left(\frac{y}{H}\right) \tag{15}$$

φ - función de una variable

Integrando la expresión (15) en los límites de hasta y = H se obtiene:

$$\frac{U_o - U_i\,(y)}{V_i} = f_o\left(\frac{y}{H}\right) \tag{16}$$

donde:

U_o - valor de la velocidad cuando y = H

El sistema de ecuaciones (16) tiene la misma forma que las expresiones individuales para el líquido homogéneo, es decir, la ley de defecto de velocidades. Por esto utilizamos sin análisis el mismo método para hallar la función $f\left(\frac{y}{H}\right)$ que se utilizó para líquidos homogéneos (1); entonces la ley de defecto de velocidades para líquidos heterogéneos tendrá la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{U_o - U_i\,(y)}{V_i} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i\,V_i}{C_i}\ln\frac{y}{H} + B_i \tag{17}$$

Para hallar las magnitudes constantes A_i y B_i, utilizamos las siguientes condiciones límites:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{A_i\left[U_o - U_i\,(y)\right]}{C_i\,V_i} = \dfrac{A_{i+1}\left[U_o - U_{i+1}\,(y)\right]}{V_{i+1}\,C_{i+1}} \\[2ex] \dfrac{A_i}{C_i\,V_i} = \dfrac{\partial U_i\,(y)}{\partial y} \end{array}\right\} \text{en } L_{i;i+1} \\[4ex] \text{cuando:} \\[2ex] y = \delta \qquad \dfrac{U_o - U_1\,(y)}{V_i} = \dfrac{U_o\,\nu_1 - V^2\,\delta}{V_1 - \nu_1} \\[3ex] y = H \qquad \dfrac{U_o - U_i\,(y)}{V_n} = 0 \end{array}\right\} \tag{18}$$

De (17) y (18) se obtiene:

$$A_1 = B_1 - \frac{U_o\,\nu_1 - V_1^{\,2}\,\delta}{V_1\,\nu_1\,\ln\frac{\delta}{H}} \qquad A_n = B_n = 0$$

$$A_i = A_{i+1}\,\frac{V_{i+1}\;\;C_i}{V_i\;C_{i+1}} \qquad B_i = \ln\frac{h_i}{H}\,(A_i - A_{i+1}) + B_{i+1}$$

Si en calidad de control se supone:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_n$$

entonces:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n \quad y \; B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_n$$

y se obtiene una expresión ratificada en múltiples ocasiones por la práctica, para la distribución de las velocidades mediatizadas en la sección del flujo de líquidos homogéneos.

Este mismo perfil logarítmico desplazado también se puede obtener mediante las teorías semiempíricas de turbulencia.

En efecto, dentro de cada capa, la solución de la ecuación (3) tendrá la siguiente forma:

$$\tau_i = \tau_{oi} \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

Admitiendo que P_{xx} es constante dentro de cada capa

$$P_{ixy} = \tau_{oi} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \tag{19}$$

De acuerdo con Prandtl, para líquidos homogéneos:

$$P_{ixy} = \rho_i \, \ell_i^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 \tag{20}$$

Expresión que podemos aplicar dentro de capa, ya que admitimos que en estos límites fluye líquido homogéneo.

De la (19) y (20) se obtiene:

$$\rho_i \, \ell_i^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 = \tau_{oi} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \tag{21}$$

donde:

ρ_i - longitud del recorrido de mezcla

H - magnitud característica del flujo

Si se utiliza la expresión de Karman para el "recorrido libre"

$$K_i = C_i \frac{\dfrac{\partial U_i}{\partial y}}{\dfrac{\partial^2 U_i}{\partial y^2}} \tag{22}$$

De (21) y (22) se tiene:

$$\frac{U_i'}{U_i''} = - \frac{C_i}{V_i} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y}{H}}} \tag{23}$$

Simbolizamos:

$$\frac{C_i}{V_i} = D_i$$

La solución del sistema (23) tiene la forma:

$$U = \sum \frac{1}{V_i} \left\{ \frac{A_i}{2D_i H} \left[i - \ell n \left(\sqrt{1 - \frac{y}{H}} + \frac{A_i}{2D_i H} \right) \right] + \sqrt{1 - \frac{y}{A}} + B_i \right\} \tag{24}$$

La cantidad de coeficientes dependerá del número de capas de líquido. Estos coeficientes se pueden determinar con la ayuda de las siguientes condiciones límites:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Cuando:} & & \\
 & y = 0 & \dfrac{\partial U_o}{\partial y} = \infty \\
\text{Cuando:} & & \\
 & y = H & Un = Uo \\
\text{Cuando:} & & \\
 & U_i = U_{iH} & \text{en } L_{i;i+1} \\
 & D_i = \dfrac{\partial U_i}{\partial y} = D_{i+1} & \dfrac{\partial U_{i+1}}{\partial y}
\end{array}\right\} \tag{25}$$

Situando la expresión (25) en (24) se obtiene:

$$A_1 = 2\, D_i\, H \qquad\qquad B = U_o - 1$$

$$A_i = \frac{D_i}{D_{i+1}} A_{i+1}$$

$$B_i = \left(1 - \frac{D_i}{D_{i+1}}\right)\left\{ \frac{A_{i+1}}{2\, D_{i+1}\, H}\left[1 - \ln\left(\sqrt{1 - \frac{h_i}{H}} + \frac{A_{i+1}}{2\, D_{i+1}\, h_i}\right)\right] + \sqrt{1 - \frac{h_i}{H}}\right\} + \frac{D_i}{D_{i+1}} B_{i+1}$$

donde:

U_o - velocidad cuando $y = H$

Todos los perfiles obtenidos tienen carácter logarítmico y no se diferencian significativamente entre sí. Cuando fluye líquido homogéneo, cada sistema (7), (17) y (24) se reduce a una ecuación que coincide con las conocidas expresiones para líquidos newtonianos.

El carácter de curvas del movimiento medio obtenidas con la ayuda de estos sistemas de ecuaciones dependerá de las propiedades físico-mecánicas de cada capa en particular y la continuación entre sí.

El factor determinante principal, además del coeficiente de Karman, evidentemente será la densidad.

Hemos obtenido soluciones aproximadas del problema del movimiento turbulento de líquidos heterogéneos con la ayuda de la teoría dimensional o a partir de las ecuaciones generales del movimiento turbulento de Reynolds. Sin embargo, existe el criterio que el sistema de ecuaciones más completo que describe el movimiento turbulento de líquidos heterogéneos [3] son la ecuaciones de Frankl. Por esto tiene gran interés el análisis de las ecuaciones del movimiento de líquidos con partículas sólidas en suspensión, con el objetivo de hallar posibles soluciones a este problema.

Si se analiza la hidromezcla como medio continuo con propiedades promediadas, entonces la expresión $\bar{\rho}_s$; $\rho_{(1-s)}$ para la densidad dentro de las partículas sólidas y del líquido se puede sustituir por las densidades medidas de las hidromezclas ρ_m.

En este caso se puede admitir que la concentración tendrá un valor medio en un volumen dado; entonces las dinámicas de los líquidos tomarán la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \bar{X}_K} U_{Ks}\right) \rho_m U_i = - \sum_{K=1}^{3} \bar{s} \frac{\partial P_{iK}}{\partial \bar{X}_K} - \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{iK}}{\partial \bar{X}_K} + R_i + \rho_m X_i \qquad (26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \bar{X}_K} U_K\right) \rho_m U_i = - \sum_{K=1}^{3} \bar{s} \frac{\partial P_{iK}}{\partial \bar{X}_K} - \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{iK}}{\partial \bar{X}_K} - R_i + \rho_m X_i \qquad (27)$$

donde:

U_1 - proyección de la velocidad instantánea del líquido en los ejes de coordenadas X_K; $K = 1, 2, 3$

U_{Ks} - lo mismo para el componente sólido

X_{si}; X_i - fuerza de masa para el componente sólido y para el líquido, respectivamente

Π_{iKs}; Π_{iK} - tensores de tensión para ambos componentes

R_i - fuerza promediada de resistencia del líquido al movimiento en las partículas sólidas

ρ_s; ρ - densidades de las masas del componente sólido y líquido, respectivamente

$s \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial P_{ik}}{\partial X_K}$ - fuerza de Arquímedes promediada provocada por las tensiones microscópicas promediadas y que actúan sobre las partículas sólidas contenidas en la unidad de volumen

t - tiempo

Sumando y dividiendo entre dos el sistema de ecuaciones (26 y (27) se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} &(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial}{\partial X_K} U_K) \rho_m U_i = - \sum_{K=1}^{3} \bar{s} \frac{\partial P_{iK}}{\partial X_K} - \\ &- \sum_{K=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{iKs}}{\partial \bar{X}_K} + \rho_m X_i \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Si, además, se sustituyen las magnitudes que integran el sistema por sus valores y se efectúan pequeñas transformaciones y admitiendo que las relaciones lineales entre los tensores de tensión y la velocidad de deformación se mantienen válidas en el movimiento turbulento de un medio bifísico, exactamente igual que esto se hace para líquidos homogéneos en el trabajo [3], entonces el sistema (28) en forma desarrollada tendrá la siguiente forma:

$$\rho_m (\frac{\partial U_K}{\partial t} + U_K \frac{\partial U_K}{\partial X} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} =$$

$$= \rho_m X_x - \bar{s} \frac{\partial P}{\partial X} + \bar{s} \mu \Delta U_x + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho_m (\frac{\partial U_y}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial y}) =$$

$$= \rho_m X_y - \bar{s} \frac{\partial P}{\partial x} + \bar{s} \mu \Delta U_y + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho_m (\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} =$$

$$= \rho_m (- \bar{s} \frac{\partial P}{\partial z} + \bar{s} \mu \Delta U_z + \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}$$

Como se ve el sistema (29) se diferencia de las ecuaciones diferenciales del movimiento turbulento de líquidos homogéneos de Reynolds sólo por la presencia de la concentración volumétrica media introducida por Frankl.

Actuando como en el caso anterior por el movimiento lineal plano y estacionario con un campo pleno paralelo de pulsaciones y admitiendo tensiones constantes de pulsación dentro del volumen de líquido homogéneo de (28) se obtiene para cada capa las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial y} = \bar{s} \frac{\partial P_i}{\partial x}$$

Pero como la concentración volumétrica promediada es una magnitud adimensional y constante para cada hidromezcla o capa, ella está contenida en los coeficientes adimensionales de los sistemas (7), (17) y (24).

De tal forma obtenemos las mismas soluciones del problema del movimiento de líquidos heterogéneos, independientemente de si partimos del sistema de ecuaciones de Reynolds o de las ecuaciones exactas del movimiento de líquidos por partículas sólidas en suspensión.

En el caso que el movimiento de partículas muy pequeñas suspensas en flujos de líquidos tiene lugar con tales velocidades que no se forman capas en la sección del flujo, se obtiene el perfil de velocidades de líquidos homogéneos. Es decir, la expresión para la distribución de las velocidades contiene la concentración volumétrica además de la constante de Karman, y restantes magnitudes adimensionales.

En conclusión, se ha obtenido con la ayuda de la dimensionalidad el perfil logarítmico de las velocidades promediadas en la sección del flujo turbulento de líquidos heterogéneos. Este mismo perfil se ha obtenido a partir de la teoría semiempírica de turbulencia.

Si se analiza la hidromezcla como medio continuo con propiedades promediadas, entonces las ecuaciones promediadas del movimiento de líquidos heterogéneos de Frankl conducen a las ecuaciones de Reynolds con la única diferencia que el término determinado por las fuerzas de presión y viscosidad resulta multiplicado por la concentración media. Si en caso contrario se analiza la hidromezcla como un sistema de dos fases cuyo movimiento se describe matemáticamente con diferentes ecuaciones para cada fase, entonces estas ecuaciones no tienen en la actualidad aplicación práctica.

REFERENCIAS

1. MONIN, A. S. y otros: Hidromecánica Estadística. Parte I. Ciencia, Moscú, 1969 (en ruso).

2. PEREZ BARRETO, R.: "Sobre el movimiento turbulento de líquidos viscosos incompresibles y heterogéneos". Series Tecnológicas, no. 1, Ingeniería de Minas, Universidad de Oriente, 1972.

3. PEREZ BARRETO, R.: "Sobre las ecuaciones diferenciales del movimiento de los líquidos heterogéneos". Series Tecnológicas, no. 3, Ingeniería de Minas, Universidad de Oriente, 1973.

4. SLYOSKIN, S. A.: Dinámica de líquidos viscosos e incompresibles. Goizdat Tejnikoteoreticheskoy Literatury, Moscú, 1961.

CDU 622.74:621.926 (729.16)

ANALISIS DEL PROCESO DE MOLIENDA EN LA EMPRESA "COMANDANTE RENE RAMOS LATOUR" Y POSIBILIDADES DE AUMENTO DE SU CAPACIDAD

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza el régimen de flujo de minerales en las unidades de molienda de la planta vieja de la empresa "Comandante René Ramos Latour" y se establece su influencia en el trabajo de las unidades. Sobre la base de los resultados obtenidos se propone una variante que al estabilizar el flujo aumente la productividad y le de un carácter más racional al esquema con modificaciones relativamente simples.