REVISTA MINERIA Y GEOLOGIA ISSN 0258 5979

CONSIDERACIONES SOBRE EL CALCULO DE VOLUMENES GEOLOGO-MINEROS POR METODOS CLASICOS

Lic. Arístides A. Legrá Lobaina

Instituto Superior Minero Metalúrgico

RESUMEN: En este artículo el autor presenta una breve valoración de los métodos de cálculo de volúmenes geólogo-mineros y propone tres soluciones para tres problemas clásicos y actuales: la determinación del volumen de un prisma de base rectangular con cotas no coplanares; la determinación del volumen de un prisma de base poligonal y cotas no coplanares; y la optimización del número de nodos a tomar en el plano XY de modo que el cálculo tenga una alta precisión. Los algoritmos presentados pueden ser programados y lograr de esta forma un alto nivel de automatización del proceso de cálculo de volúmenes.

ABSTRACT: A brief valuation of calculating methods for geological and mining bulks is given, as well as three solutions to three actual problems. Algorithms presented can be programmed in order to reach a high automatization level in bulks calculation process.

INTRODUCCION

Un aspecto importante en el trabajo geólogo-minero es el cálculo de volúmenes de una región tridimensional de la cual se conoce un conjunto de puntos de su frontera (x_i, y_i, z_i) $i = 1,2,...,n$. Los métodos clásicos más conocidos son el de secciones transversales, el de triángulos, el de polígonos, el de isolíneas y el del inverso de las distancias. La ventaja principal de estos métodos consiste en la sencillez de su implementación, pero tienen como desventaja que no son capaces de evaluar el error cometido.

Existe un segundo conjunto de métodos relacionados con la estadística que se basan en los conceptos de regresión y correlación y en el uso del principio de los mínimos cuadrados. Estos métodos precisan de experiencia estadística para evaluar la curva o superficie más adecuada y de programas computacionales flexibles y confiables.

Al tercer grupo de métodos pertenecen los geoestadísticos, basados en la aplicación de la teoría de variables regionalizadas (creadas por G. Matheron entre 1957 y 1962). Lo esencial de esta teoría es que las variables tienen carácter aleatorio y espacial y pretende extraer del aparente desorden de los datos disponibles una imagen de variabilidad entre los mismos a través del variograma. Por otra parte debe medir la precisión de las estimaciones, ello se realiza mediante el método conocido como KRIGGING. La mayor dificultad de estos métodos radica en que existen modelos teóricos de referencia entre los cuales se puede seleccionar el que más convenga o crear uno nuevo, lo cual no es sencillo, también puede suceder que el variograma observado no esté tan cerca como se necesita del modelo teórico de referencia; el cálculo por estos métodos es laborioso y precisa de una gran experiencia previa y del uso de computadoras, sin embargo se reporta que estos métodos son precisos no sólo en cuestiones geólogo-mineras sino también en meteorología, estudios submarinos, etc.

En este trabajo se hacen propuestas críticas para el mejoramiento del cálculo de volúmenes geólogo-mineros por métodos clásicos de modo que se obtenga mayor precisión en los cálculos.

CALCULO DE VOLUMENES USANDO MEDIOS AUTOMATICOS EN PRISMAS DE BASE RECTANGULAR

Una tarea clásica es el cálculo del volumen del prisma de base en forma de poligonal cerrada con n vértices en el plano XY: P1, P2, P3,...Pn y conocidas sus cotas z1, z2, ..., zn en dichos puntos. Es común encontrarse con la fórmula aproximada:

V = Area de la base x Media de las cotas.

Hay que señalar sin embargo que *esta fórmula es exacta cuando los puntos (x_i, y_i, z_i), $i = 1,2,...n$ son COPLANARES.*

Esto implica que la fórmula es siempre exacta si se trata de un prisma de base triangular. En la mayoría de los sistemas de observaciones que se hacen en Cuba las redes son rectangulares por lo que al utilizar este método, en general, se introduce un error desconocido y evitable. Un modo de resolver esta situación es el siguiente:

Consideremos, sin perder generalidad, el caso simple que se muestra en la figura 1:

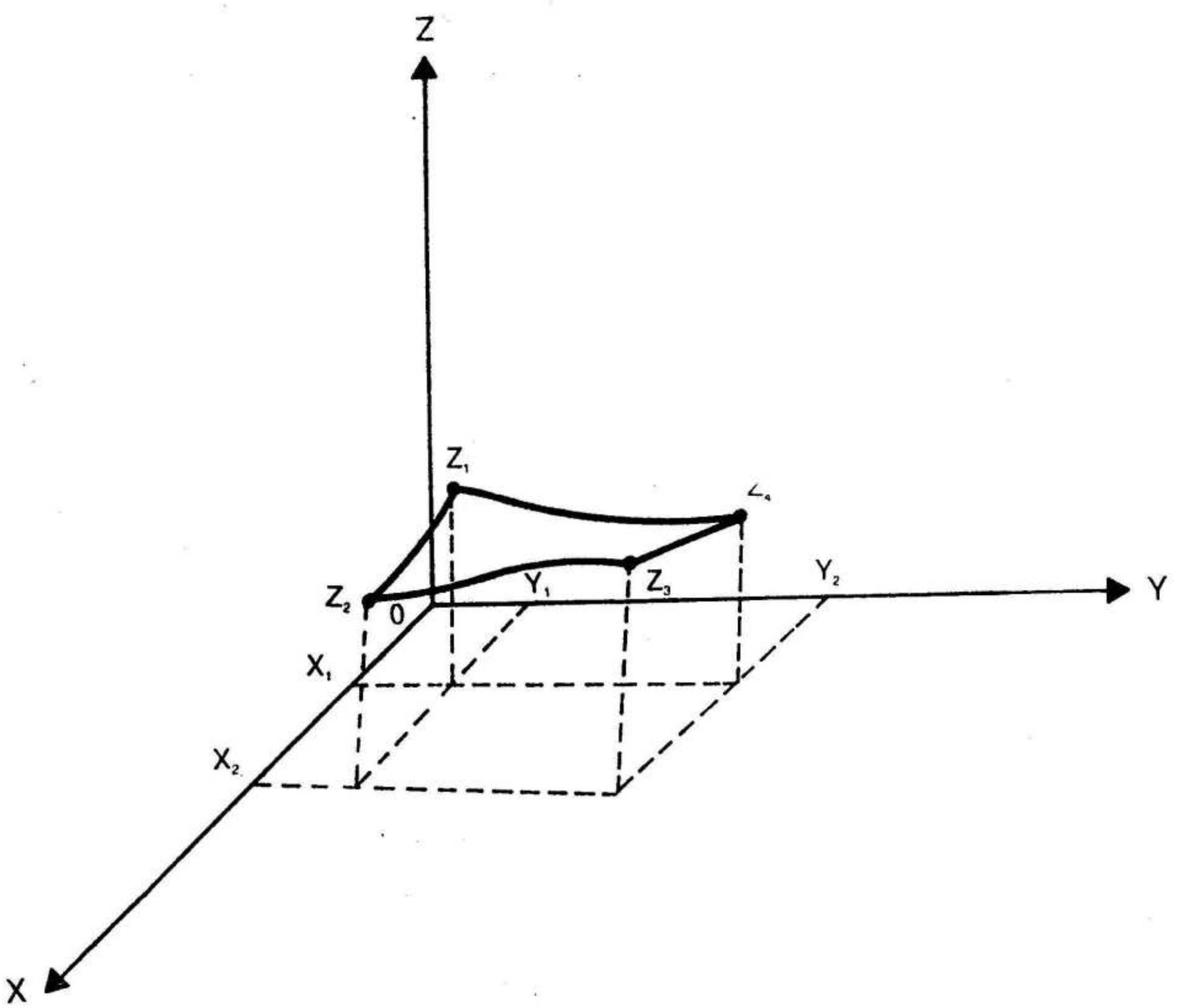

FIGURA 1.

El modo clásico de calcular el volumen sería:

$$V = (y2 - y1)(x2 - x1)(z1 + z2 + z3 + z4)/4$$

Lo cual introduce un error si los puntos (x1, y1, z1) ; (x2, y1, z2) ; (x2, y2, z3) y (x1, y2, z4) no son coplanares.

Sin embargo, por estos puntos pasa un único paraboloide hiperbólico de ecuación $z = a + bx + cy + dxy$. Se propone calcular los valores de a, b, c, y d resolviendo el sistema:

$$a + b\,x1 + c\,y1 + d\,x1\,y1 = z1$$

$$a + b\,x2 + c\,y1 + d\,x2\,y1 = z2$$

$$a + b\,x2 + c\,y2 + d\,x2\,y2 = z3$$

$$a + b\,x1 + c\,y2 + d\,x1\,y2 = z4$$

y calcular el volúmen, integrando:

$$V = \int_{x1}^{x2} \int_{y1}^{y2} (a + bx + cy + dxy)\ dy\ dx$$

cuya solución es :

$$V = (a\,.\,k + c\,.\,h)\,l + (b\,.\,k + d\,.\,h)\,m \quad , \quad \text{donde:}$$

$$k = y2 - y1 \qquad h = (y2 - y1)/2$$

$$l = x2 - x1 \qquad m = (x2 - x1)/2\ .$$

Este método es muy fácil de programar en una computadora para su cálculo y se podría considerar incluso el caso en que se tengan diferentes medidas en las bases. Esto trae como consecuencia que la precisión no depende del cálculo matemático y puede ser muy útil para el caso en que ya se tienen las mediciones en redes de bases rectangulares (lo que es muy común, por ejemplo, en los yacimientos lateríticos de Moa, Cuba).

CALCULO DE VOLUMENES EN REDES NO RECTANGULARES

Este problema se presenta a menudo en los casos de explotación minera a cielo abierto, donde no siempre es posible hacer observaciones en forma de red rectangular.

Consideremos el caso de la figura 2.

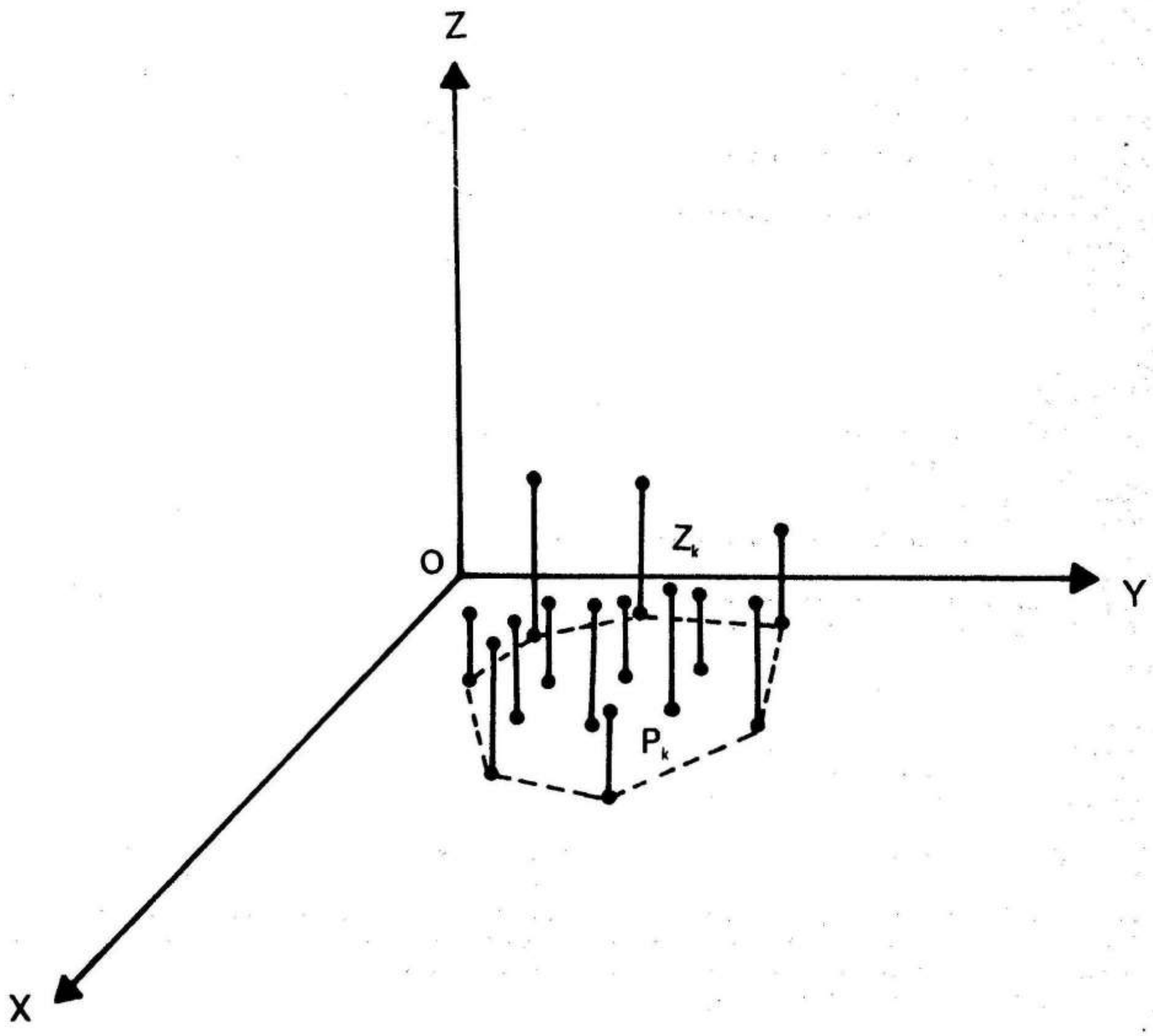

FIGURA 2.

En este caso puede utilizarse el siguiente método:

a) Completar en el plano XY una red rectangular que incluya a los puntos P1,...,Pn.

b) Determinar la frontera en el plano XY de nuestra región (línea de puntos en la figura 2).

c) Asignar el valor 0 a las zj tales que Pj está fuera de la frontera (usando un criterio de experto).

d) Estimar los valores zk de la variable Z tales que Pk esté dentro de la frontera. Esto puede hacerse por varios métodos, por ejemplo:

i) Hallando la media aritmética o geométrica entre los puntos vecinos.

ii) Por el método de la media de los inversos de la distancia.

iii) Por Krigging.

e) Cálculo del volumen usando métodos automáticos en prismas de base rectangular.

En este caso se recomienda reducir este problema al anterior. Este método tiene como desventaja que necesita del criterio de un experto por lo que se hace difícil su automatización, pero una vez resuelto este problema se tendría un procedimiento correcto para evaluar el volumen de yacimientos geológicos o de explotación minera con un alto nivel de precisión con las consiguientes ventajas económicas.

Otro modo de resolver el problema es el siguiente: supongamos que la base del sólido al que se quiere hallar el volumen está limitada por un polígono convexo de vértices P1, P2, ..., Pm y en estos puntos (xi,yi) se conocen los valores de la variable zi (i = 1,...,m; m > 2). El polígono se dividirá en triángulos con vértices en los vértices del polígono de manera tal que la unión de estos triángulos cubra el área del polígono y la intersección de ellos sea vacía.

$$A = m \text{ div } 2 \text{ (división entera)}$$

$$B = \begin{cases} A - 1 & \text{si m es imparr} \\ A - 2 & \text{si m es par} \end{cases}$$

El número total de triángulos es:

$$T = A + B$$

Para determinar los tres vértices de cada triángulo se seguirá el siguiente método.

a) Los primeros A triángulos tienen como vértices los puntos de subíndices:

1, 2, 3
3, 4, 5
"
"
"
m-2, m-1, m   si m es impar
m-1, m, 1   si m es par

b) Los próximos B triángulos tienen los vértices:

m, 1, 3   si m es impar
1, 3, 5   si m es par
"
"
"
m-2, m-1, m

Un recurso que puede utilizarse para determinar los últimos B tríos de vértices es seguir los primeros vértices de los A primeros triángulos.

Para calcular el volumen de sólido, se usará la siguiente fórmula:

$$V = \sum_{i=1}^{m} \text{Volumen Triángulo } (T_i)$$

Ti representa a cada uno de los m triángulos.

VolumenTriángulo es un procedimiento que consiste en lo siguiente:

a) Si no hay otros puntos de los datos medidos en el interior y en la frontera del triángulo aparte de los vértices, entonces:

VolumenTriángulo = (Area del triángulo) x (Media de las cotas del triángulo)

b) Si hay un punto en la frontera debe estar sobre uno de los lados del triángulo. Uniendo este punto con el vértice más alejado se obtienen dos triángulos T1 y T2 de manera que:

VolumenTriángulo = VolumenTriángulo (T1) + VolumenTriángulo (T2)

c) Si hay un punto interior, entonces se une con cada uno de los vértices y se obtienen tres triángulos T1, T2, y T3 de modo que:

VolumenTriángulo = VolumenTriángulo (T1) + VolumenTriángulo (T2) + VolumenTriángulo (T3)

Este proceso es automatizable y además graficable. Tiene como dificultad aparente el hecho de que el polígono de la frontera de la base del sólido debe ser convexo, pero si se quisiera calcular el volumen de un sólido de base limitada por un polígono no convexo bastaría calcular el volumen en el del polígono convexo y el volúmen del sólido que se quiere restar, y luego restar los volúmenes.

DISMINUCION DEL NUMERO DE OBSERVACIONES

Uno de los problemas más interesantes (y acuciantes por el significado económico que tiene) es disminuir el número de observaciones (ejemplo: en perforaciones geológicas) sin aumentar el error en el cálculo del volumen. En este caso se propone un método que resuelve el problema desde el punto de vista del cálculo matemático, para ello se informan algunos resultados clásicos.

Fórmula de cuadratura de Gauss.

Sea y = f(x) una función integrable en [a,b] y sean $t_1, \ldots, t_n$ los n ceros del polinomio de Legendre Pn(x) (de grado n).

Sean además los valores de A1, A2, ..., An llamados factores de ponderación, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i\, f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right)$$

y el error cometido es:

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}\,(n!)^4\, f^{(2n)}(l)}{[(2n)!]^3 \cdot (2n+1)} \qquad \text{donde } l \in (a,b)$$

Nótese que esta fórmula tiene un alto nivel de precisión, de modo que, si por ejemplo, n = 8 se obtiene un resultado exacto para polinomios de grado 16.

A continuación se ofrecen los valores aproximados de ti y Ai para n = 8.

	ti	Ai
i = 1 ; 8	- + 0.96028986	0.10122858
i = 2 ; 7	- + 0.79666648	0.22238104
i = 3 ; 6	- + 0.52553242	0.31370664
i = 4 ; 5	- + 0.18343464	0.36268378

Método propuesto:

a) Tomar secciones cuadradas de 400 x 400 m orientadas en los ejes OX y OY (pueden ser ejes sur-norte y oeste-este).

b) En el eje OX denotar ax al primer valor y bx al último valor (bx = ax + 400 m) según el sistema relativo y análogamente denotamos en el eje OY los valores ay y by .

c) Determinar los 8 valores xi = (ax + 200) + 200 ti.

d) Análogamente determinar ocho valores yi = (ay + 200) + 200 ti.

e) Determinar por mediciones los 64 valores Zij en cada punto (xi,yj); i,j = 1,2,...,8 en 160 000 m^2 .

f) Calcular las áreas de las secciones transversales para cada xi, de modo que se obtengan los valores:

$$I_i = 200 \sum_{k=1}^{8} A_k Z_{ik}$$

g) Calcular:

$$V \approx 200 \sum_{K=1}^{8} A_k I_k$$

La justificación del método se basa en lo siguiente:

Supongamos cumplidas las condiciones para que exista la integral:

$$V = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\,dx\,dy$$

donde, V es el volumen del sólido limitado por:

$$\begin{aligned} a &\le x \le b \\ f(x) &\le y \le g(x) \\ 0 &\le z \le h(x,y) \end{aligned}$$

La idea consiste en calcular las áreas Ii de las secciones paralelas al plano YZ manteniendo constante x = xi y usando la fórmula:

$$I_i = \frac{g(x_i) - f(x_i)}{2} \sum_{k=1}^{8} A_k\, h\left(x_i, \frac{g(x_i) + f(x_i)}{2} + \frac{g(x_i) - f(x_i)}{2} t_k\right)$$

Finalmente se calcula:

$$V \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{8} A_k \cdot I_k$$

Hay que señalar que es discutible la medida del lado del cuadrado que se toma (en este caso 400 m) y que se debe consultar a los expertos para cada caso concreto.

Una desventaja que tiene el método es que los nodos utilizados en una medición sólo se pueden usar en redes más finas atendiendo a criterios de expertos en matemática y en geología o minería.

La ventaja principal está en que se logra con pocos nodos un nivel de precisión alto (esto lo justifica la fórmula del error).

CONCLUSIONES

Este último método puede ser fácilmente extendido a la valoración de otras cuestiones mineras y geológicas que en ocasiones se determinan usando medias de algún tipo. Vale mencionar el caso de determinación de las reservas de menas que en muchos casos se calcula como Q = V x dm (dm es el peso volumétrico medio) sin embargo, podría incluirse en las fórmulas del método antes mencionado los valores de di medidos en cada nodo de modo que en vez de Zi se use Zi x di y de este modo aumenta el nivel de precisión en el cálculo de Q.

Como criterio final, consideramos que con el último método se resuelven los problemas de precisión y optimización de los nodos en los casos que se calculan por métodos clásicos sobre todo por lo sencilla que resulta su automatización.

REFERENCIAS

1. BRONSHTEIN, I. y K. SEMENDAIEV: Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes. Ed. Mir. Moscú, 1973.
2. CHENEY, W. & DAVID KINCAID: "Numerical Mathematics and Computing" Brooks/Cole Publishing Company, USA, 1985.
3. DANILINA, N.I. et al.: Matemática de Cálculo. Ed. Mir. Moscú, 1985.
4. DEMIDOVICH, B.P. & L.A. MARON: Computational Mathematics. Mir Publisher, Moscow, 1973.
5. GARCIA GUERRA, P.A.: Geoestadística Operacional. Departamento Nacional de Producción Mineral. Brasil, 1988.
6. Viceministerio de Geología: "Cálculo de reservas". MINBAS, Cuba, 1981.