

Contribución al cálculo del área de la sección de la carga en la banda transportadora de mineral laterítico

Claudio José Ricaurte Machado
Arístides Alejandro Legrá Lobaina

Resumen

Mediante el uso del ángulo mínimo y del ángulo tangencial de reposo se establece una caracterización teórica de las formas de la sección de la carga mineral en un transportador de banda; esta nueva caracterización sustituye los modelos empíricos clásicos y permite escoger la forma correcta durante el diseño de los transportadores. Se describen las fórmulas para el cálculo del área en cada caso y se sistematiza el cálculo de estas áreas mediante un algoritmo.

Palabras clave

Ángulo de reposo, sección de carga, transportador de banda.

Contribution to the calculation of the area of the load section in the belt conveyor for ore discharge service

Abstract

A theoretical characterization of the shapes of the ore loading section in a belt conveyor is established by using the minimum angle and the tangential angle of repose. This new characterization replaces classic empiric models and allows selection of the correct shape for the design of the conveyors. It also describes the formulae required for the calculation of the area in each case and the calculation of these areas is systematized through an algorithm.

Key words

Angle of repose, load section, belt conveyor.

INTRODUCCIÓN

La productividad de un transportador de banda de material a granel se calcula mediante la siguiente expresión (Oriol & Aguilar 1992):

$$Q = 3600 A v \gamma \psi \quad (1)$$

Donde Q es la productividad (kN/h), γ el peso específico de material (kN/ m³), v es la velocidad (m/s), A es el área de la sección de la carga (m²) y ψ es el coeficiente de deslizamiento.

Según Larrade y Miravette (1996), el valor de A generalmente se determina mediante la expresión $A=K B^2 \tan(\alpha)$, donde α es el llamado ángulo de reposo y K una constante que se obtiene experimentalmente para cada tipo de material a transportar. A la expresión $K_f = K \tan(\alpha)$ se le llama factor de forma de la sección de la carga que se deposita a granel sobre una banda plana de un transportador de banda. El factor de forma es esencial en el proceso del diseño del transportador cuando se determina el ancho teórico de la banda mediante la ecuación 2 (Oriol 1995):

$$B = 1,1 \left(\sqrt{\frac{Q}{\gamma v K_f}} + 0,05 \right) \quad (2)$$

En la literatura revisada (Alexandrov 1976, Alexandrov & Kuleshov 1986, Lauhoff 1987, Oriol & Aguilar 1992, Lieberwirth 1996, Aguilar-Parés 2002, Alspaugh 2004 y 2005, Rubber 2006 y Alspaugh & Dewicki 2009) no existen especificaciones que permitan caracterizar de forma precisa y directa la geometría de la sección de una carga depositada a granel sobre la banda plana de un transportador; tampoco se conocen expresiones que permitan establecer de manera precisa el referido factor de forma.

El presente trabajo busca establecer una caracterización de la geometría de la sección de la carga, en función de los ángulos φ_m y φ_t , siendo el primero el ángulo entre la horizontal y la línea que une a uno de los extremos en la base de la carga y su punto de máxima altura, y el segundo, el ángulo entre la horizontal y la línea tangente al contorno

de sección de la carga trazada en uno de los extremos de la base; ambos ángulos están comprendidos entre 0 y 90 grados. El objetivo es obtener las expresiones que permitan establecer, de forma precisa, tanto el factor de forma correspondiente, como el área de la sección de la carga para cada una de las posibles formas geométricas que ésta adopte.

Caracterización de la geometría triangular y fórmula de cálculo del área correspondiente

El área de la sección de la carga resultará triangular cuando los ángulos φ_m y φ_t sean iguales, como muestra la Figura 1, donde:

b_0 , corresponde al ancho de la sección de la carga.

h , corresponde a la altura de la sección de la carga.

φ_m , representa el ángulo entre la horizontal o la base b_0 de la sección y la línea que une a uno de los extremos de dicha sección con el punto de altura máxima.

φ_t , representa el ángulo entre la horizontal y la tangente a la superficie lateral de la carga, trazada en uno de los puntos extremos de la base de dicha carga.

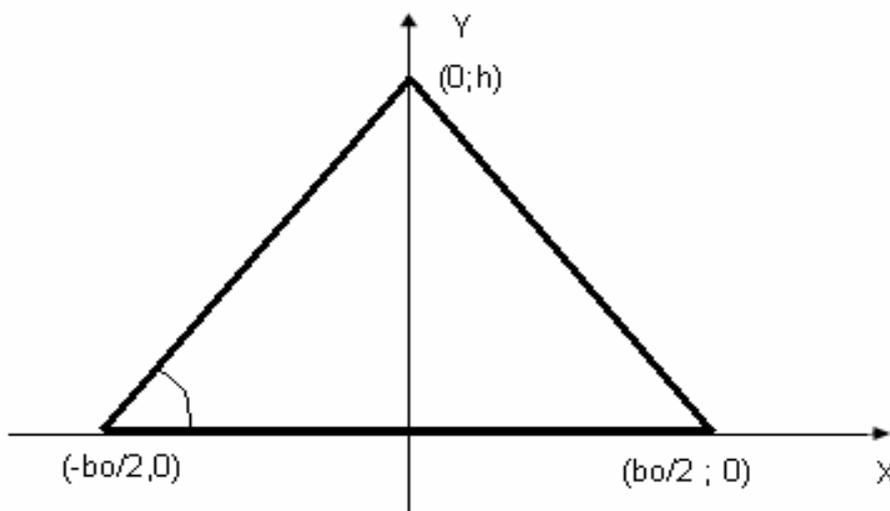


Figura 1. Carga en reposo de sección triangular.

Dado que la sección de la carga es triangular, entonces el área de dicha sección se obtiene a través de la ecuación 3 (Swokowski 2002):

$$A = \frac{b_0 * h}{2} \quad (3)$$

$$\text{Donde } h = \left(\frac{b_0}{2} \right) * \tan(\varphi_m) \quad (4)$$

Sustituyendo 4 en 3, se obtiene:

$$A = \frac{b_0^2 * \tan(\varphi_m)}{4} \quad (5)$$

Y se establece como factor de forma K_f al término $\frac{\tan(\varphi_m)}{4}$.

Caracterización de la geometría parabólica y fórmula de cálculo del área correspondiente

Tal como muestra la Figura 2, el área de la sección transversal de la carga está comprendida entre el contorno de la carga y su base.

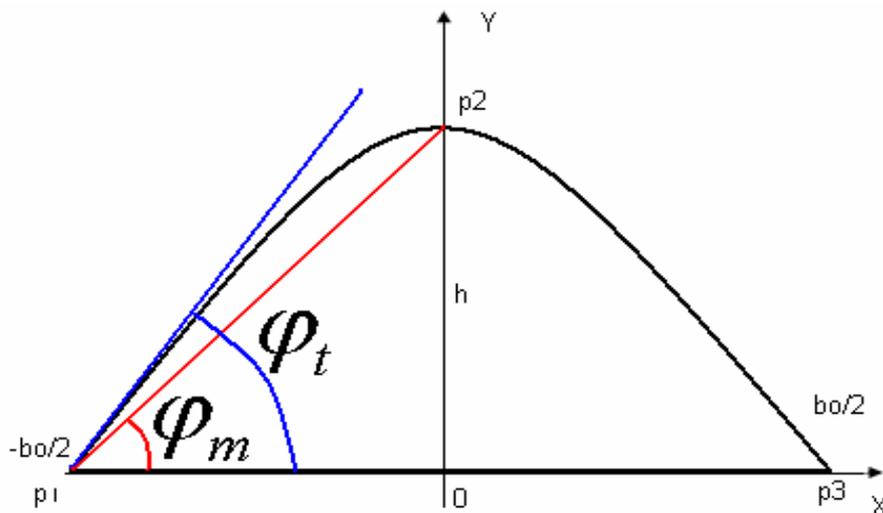


Figura 2. Carga en reposo de sección parabólica.

Esta curva puede considerarse como una parábola de orden n cuya ecuación se expone seguidamente (Swokowski 2002):

$$y = -a x^n + c \quad (6)$$

Al evaluar esta expresión en los puntos p_1 , p_3 y p_2 se obtiene:

$$\text{Para } p_1 = \left(-\frac{b_0}{2}, 0\right) : \\ 0 = -a \left(-\frac{b_0}{2}\right)^n + c \quad (7)$$

$$\text{Para } p_3 = \left(\frac{b_0}{2}, 0\right) : \\ 0 = -a \left(\frac{b_0}{2}\right)^n + c \quad (8)$$

Para $p_2 = (0, h)$ y recordando que $h = \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m)$, se obtiene que:

$$\frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) = -a (0)^n + c \quad (9)$$

$$\text{De donde se obtiene que } c = \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \quad (10)$$

Y sustituyendo a c de la expresión 10 en la expresión 7, se obtiene:

$$-a \left(-\frac{b_0}{2}\right)^n + \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) = 0 \quad (11)$$

De ahí ella se obtiene la expresión 12:

$$a = \frac{\tan(\varphi_m)}{(-1)^n \left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} \quad (12)$$

Sustituyendo c en la expresión 8, se obtiene entonces

$$-a \left(\frac{b_0}{2}\right)^n + \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) = 0 \quad \text{y por tanto:}$$

$$a = \frac{\tan(\varphi_m)}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} \quad (13)$$

La ecuación de la curva que caracteriza a la sección transversal de la carga en este caso viene dada por:

$$y = -\frac{\tan(\varphi_m)}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} x^n + \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \quad (14)$$

El área de la sección transversal de la carga se obtiene integrando la expresión 14 entre los límites $-b_0/2$ y $b_0/2$ (Kreyszig 2006) Esto es:

$$A = 2 \int_0^{\frac{b_0}{2}} y(x) dx$$

$$\text{O sea, } A = 2 * \int_0^{\frac{b_0}{2}} \left[-\frac{\tan(\varphi_m)}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} * x^n + \frac{b_0}{2} * \tan(\varphi_m) \right] dx \quad (15)$$

Cuyo resultado es:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right) b_0^2 \tan(\varphi_m)$$

Se obtiene como factor de forma $K_f = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right) \tan(\varphi_m)$.

Para establecer la relación entre los ángulos φ_m y φ_t , que permita caracterizar esta sección de la carga, se deriva con respecto a x la expresión 14, obteniéndose:

$$\frac{dy}{dx} = -n \frac{\tan(\varphi_m)}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^{n-1}} x^{n-1}$$

que al ser evaluada para $X = -b_0/2$ conduce a:

$$\frac{dy}{dx} = n \tan(\varphi_m) \quad (16)$$

Por definición (Swokowski 2002) se sabe que:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\varphi_t) \quad (17)$$

Entonces, igualando los segundos miembros de las expresiones 16 y 17 despejando el valor de n , se obtiene:

$$n = \frac{\tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m)} \quad (18)$$

Debido a la necesidad de que la curva exprese la simetría axial de la sección de la carga, el valor de n debe aproximarse a la relación $n = 2\left(\frac{j}{u}\right)$ siendo j y u , números naturales.

Caracterización de la geometría parabólica cuadrática y fórmula de cálculo del área correspondiente

La ecuación general (Swokowski 2002) puede escribirse de la siguiente forma:

$$y = -a x^2 + b x + c \quad (19)$$

Tomando como referencia la Figura 2, se deduce que $b=0$, y que la curva pasa por los puntos p_1 , p_3 y p_2 . De manera semejante puede deducirse que en esta ocasión la curva se describe por la expresión:

$$y = -\frac{2 \operatorname{tg}(\varphi_m)}{b_0} x^2 + \frac{b_0}{2} \operatorname{tg}(\varphi_m) \quad (20)$$

El área de la sección transversal de la carga se obtiene integrando esta ecuación entre los límites $-b_0/2$ y $b_0/2$. Entonces:

$$A = \frac{1}{3} b_0^2 \tan(\varphi_m) \quad (21)$$

Para este caso se tiene que el factor de forma es $K_f = 1/3 * \tan(\varphi_m)$.

Para establecer una relación entre los ángulos φ_m y φ_t que permita caracterizar la sección de la carga se sigue un procedimiento semejante al realizado en el caso anterior y se obtiene:

$$\frac{\tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m)} = 2 \quad (22)$$

Caracterización de la geometría semi-elíptica y fórmula de cálculo del área correspondiente

El área de la sección de la carga será semi-elíptica, como se indica en la Figura 3, cuando $\varphi_m < \varphi_t$ pero $\varphi_t \approx 90^\circ$.

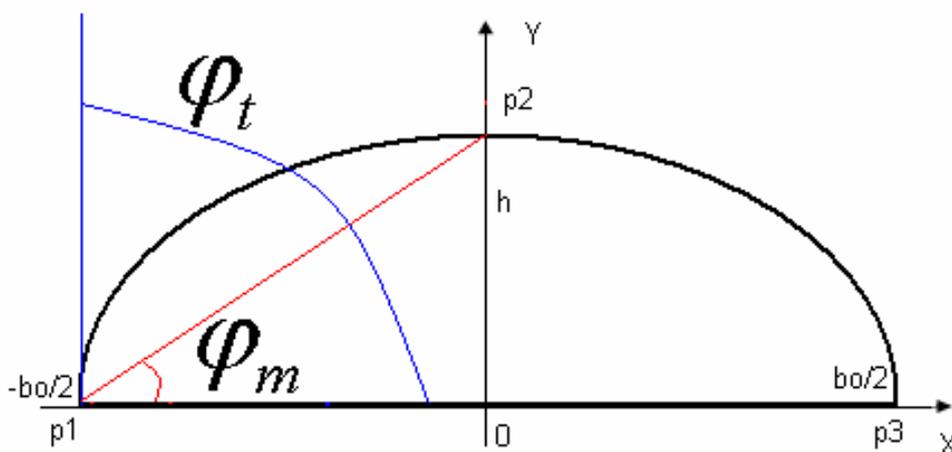


Figura 3. Carga en reposo de sección semi-elíptica.

Considerando la ecuación canónica de esta curva (Swokowski 2002) se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

De la Figura 3 se deduce que:

$$a = -\frac{b_0}{2} \quad (24)$$

$$h = b = \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \quad (25)$$

Sustituyendo los segundos miembros de las ecuaciones 24 y 25 en la ecuación 23 y despejando, se obtiene:

$$y = \pm \left[\left(\frac{b_0}{2} \right)^2 \tan^2(\varphi_m) - x^2 \tan^2(\varphi_m) \right]^{1/2} \quad (26)$$

Que para la sección superior de la curva es posible expresar como:

$$y = \left[\left(\frac{b_0}{2} \right)^2 - x^2 \right]^{1/2} * \tan(\varphi_m) \quad (27)$$

El área de la sección transversal de la carga se consigue integrando adecuadamente la expresión 27 entre los límites $-b_0/2$ y $b_0/2$ y se obtiene:

$$A = \frac{\pi}{8} b_0^2 \tan(\varphi_m) \quad (28)$$

Se establece entonces como factor de forma $K_f = \pi/8 * \tan(\varphi_m)$.

Para obtener la relación entre los ángulos φ_m y φ_t se deriva con respecto a x la ecuación 27:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x * \tan(\varphi_m)}{\left[\left(\frac{b_0}{2} \right)^2 - x^2 \right]^{1/2}} \tag{29}$$

Y evaluando la expresión 29 para $X = -b_0/2$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{30}$$

Dado que $dy/dx = \tan(\varphi_t)$, entonces $\tan(\varphi_t) = 0$ y por tanto, atendiendo a las características de este problema, $\varphi_t = 90^\circ$.

Caracterización de la geometría hiperbólica y fórmula de cálculo del área correspondiente

El área de la sección de la carga será hiperbólica cuando $\varphi_m \gg \varphi_t$ (Figuras 4 y 5). Se asumirá que decir que $\varphi_m \gg \varphi_t$ es equivalente a decir que $\varphi_m - \varphi_t > \lambda = 60^\circ$, o sea que λ es el ángulo que marca la diferencia entre el modelo hiperbólico y el modelo parabólico (Figura 5).

La ecuación correspondiente a esta hipérbola viene dada por la expresión 31 (Swokowski 2002):

$$(x + x_0)(y + y_0) = p \tag{31}$$

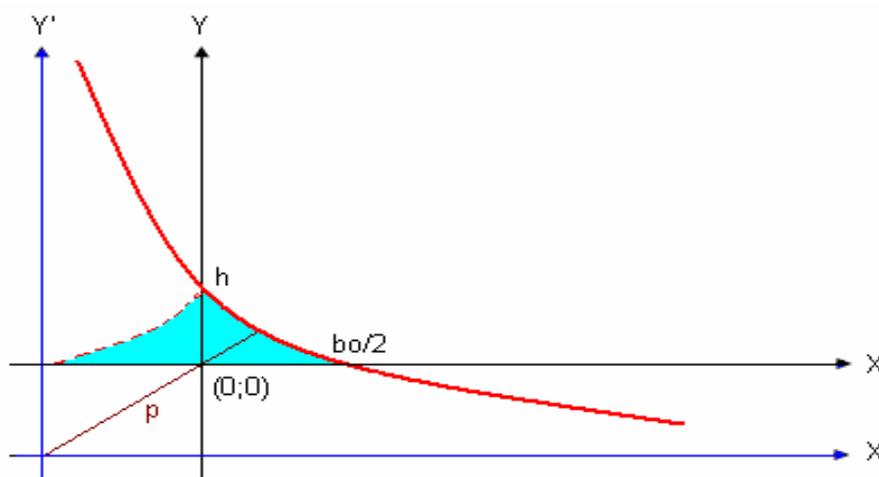


Figura 4. Carga en reposo de sección hiperbólica.

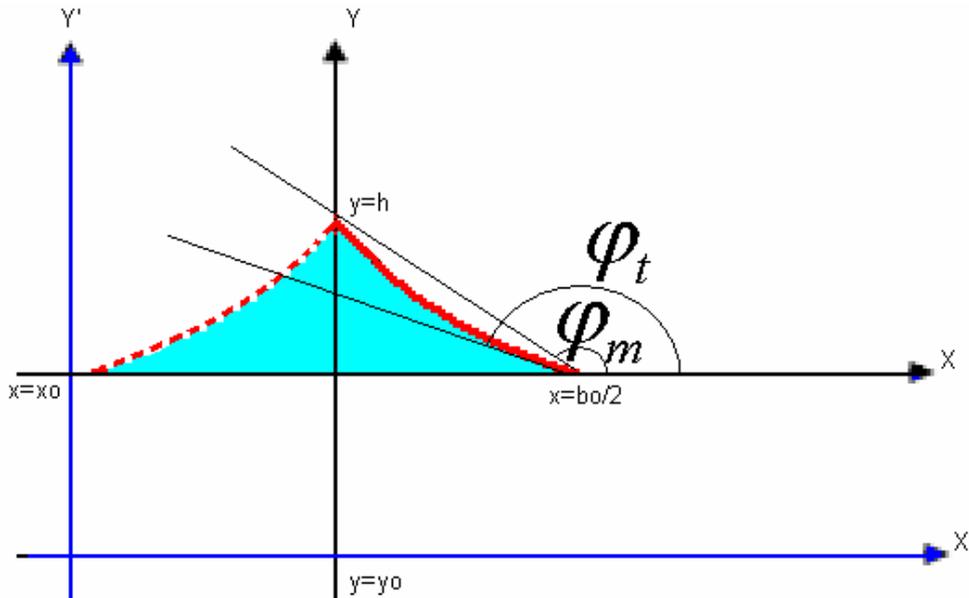


Figura 5. Ángulos φ_m y φ_t para carga en reposo de sección hiperbólica.

Esta hipérbola pasa por el punto $(b_0/2, 0)$ y al evaluar la ecuación en este punto se obtiene:

$$\left(\frac{b_0}{2} + x_0\right) y_0 = p \tag{32}$$

De la ecuación anterior se tiene que:

$$y_0 = \frac{p}{\frac{b_0}{2} + x_0} \tag{33}$$

También la hipérbola pasa por el punto $(0, h)$ y tomando en cuenta que

$h = \left(\frac{b_0}{2}\right) \tan(\varphi_m)$, al evaluarla en este punto se obtiene:

$$x_0 \left[\frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) + y_0 \right] = p \tag{34}$$

Despejando y_0 en 34 se obtiene que:

$$y_0 = \frac{p}{x_0} - \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \tag{35}$$

Al igualar los segundos miembros de las ecuaciones 33 y 35 se obtiene que:

$$\frac{p}{\frac{b_0}{2} + x_0} = \frac{p}{x_0} - \frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \quad (36)$$

Y de 36, despejando el valor de p:

$$p = x_0 \left(\frac{b_0}{2} + x_0 \right) \tan(\varphi_m) \quad (37)$$

Despejando y en la expresión 31 y derivando con respecto a x se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{p}{(x + x_0)^2} \quad (38)$$

Esta derivada evaluada en el punto $(b_0/2, 0)$, es igual a la tangente del ángulo entre el eje de OX y la recta tangente a la curva en dicho punto. En base a esto se establece que:

$$\tan(180^\circ - \varphi_t) = - \frac{p}{\left(\frac{b_0}{2} + x_0 \right)^2} \quad (39)$$

Y recordando que $\tan(180^\circ - \varphi_t) = - \tan(\varphi_t)$, la ecuación 39 puede escribirse de la siguiente forma:

$$\tan(\varphi_t) = \frac{p}{\left(\frac{b_0}{2} + x_0 \right)^2} \quad (40)$$

De la ecuación 40 se puede despejar p :

$$p = \left[\frac{b_0}{2} + x_0 \right]^2 \tan(\varphi_t) \quad (41)$$

Al igualar los segundos miembros de las ecuaciones 37 y 41, se obtiene:

$$x_0 \left(\frac{b_0}{2} + x_0 \right) \tan(\varphi_m) = \left(\frac{b_0}{2} + x_0 \right)^2 \tan(\varphi_t) \quad (42)$$

De la ecuación 42 se puede despejar x_0 :

$$x_0 = \frac{\frac{b_0}{2} \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \quad (43)$$

Sustituyendo la expresión 43 en la ecuación 37 o en la ecuación 41, se obtiene:

$$p = \left[\frac{\frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right]^2 \tan(\varphi_t) \quad (44)$$

Sustituyendo las expresiones de x_0 y de p en la ecuación 33 o en la ecuación 35, se obtiene para y_0 la expresión:

$$y_0 = \frac{\frac{b_0}{2} \tan(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \quad (45)$$

El área de la sección de la carga se obtiene como el duplo del resultado de integrar la ecuación: $y = \frac{p}{x + x_0} - y_0$ entre los límites: 0 y $b_0/2$. Esto es:

$$A = 2 p \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{b_0}{2 x_0} \right) - y_0 b_0 \quad (46)$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones de x_0 , p y de y_0 dadas, respectivamente, por las ecuaciones 43, 44 y 45 y manipulando adecuadamente los términos, se obtiene la expresión:

$$A = \frac{b_0^2}{2} \left\{ \frac{\tan^2(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{[\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)]^2} \operatorname{Ln} \left[\frac{\tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_t)} \right] - \frac{\tan(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right\} \quad (47)$$

Sistematización del cálculo del área de la sección de la carga en un transportador

La Tabla 1 muestra un resumen de las relaciones entre los ángulos φ_m y φ_t , que permite caracterizar la forma geométrica de la sección de la carga para cada uno de los casos estudiados. Ahora se puede decidir cuál es la fórmula pertinente para cada caso.

Tabla 1. Formas de la sección de la carga en función de la relación angular

Relación entre φ_m y φ_t	Forma geométrica de la sección de la carga.
Si $\varphi_m = \varphi_t$	Triangular
Si $\varphi_m \gg \varphi_t$ (se puede asumir que $\varphi_m - \varphi_t > \lambda = 60^\circ$)	Hiperbólica
Si $\varphi_m > \varphi_t$ pero $\varphi_m - \varphi_t \leq \lambda = 60^\circ$ entonces se calcula $n = 2 * \left(\frac{j}{u} \right) \approx \frac{\tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m)}$ considerando que J y u $\in \mathbb{N}$	Parabólica de orden n
Si $\frac{\tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m)} = 2$	Parabólica de orden 2
Si $\varphi_m < \varphi_t$ y $\varphi_t \approx 90^\circ$	Semi-elíptica

En las Tablas 2 y 3 se presentan de forma sistémica las expresiones obtenidas, tanto para el factor de forma K_f como para el area A , correspondientes a cada geometría que adopta una sección de carga.

Tabla 2. Expresiones del factor de forma K_t para cada una de las secciones de la carga

Geometría	Expresiones para el factor de forma K_t para cada geometría de sección de la carga	
Triangular	$K_f = \frac{\tan(\varphi_m)}{4}$	
Parabólica	Grado n	$K_f = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right) \tan(\varphi_m)$
	Grado 2	$K_f = \frac{1}{3} \tan(\varphi_m)$
Semi-elíptica	$K_f = \frac{\pi}{8} \tan(\varphi_m)$	
Hiperbólica	$K_f = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\tan^2(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{[\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)]^2} \operatorname{Ln} \left[\frac{\tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_t)} \right] \right\}$ $\frac{1}{2} \left\{ - \frac{\tan(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right\}$	

Con fines prácticos, en la Tabla 3 se presentan los valores de K_f calculados para diversos valores de φ_m y φ_t dados en radianes. En la Tabla 4 se sistematizan las fórmulas de cálculo del área.

Tabla 3. Valores de K_f en función de φ_m y φ_t dados en radianes

φ_m	φ_t	K_f	φ_m	φ_t	K_f	φ_m	φ_t	K_f
0,1	0,1	0,02508	0,1	0,6	0,04375	0,1	1,1	0,04772
0,2	0,1	0,03355	0,2	0,6	0,07818	0,2	1,1	0,09187
0,3	0,1	0,03788	0,3	0,6	0,10650	0,3	1,1	0,13362
0,4	0,1	0,04054	0,4	0,6	0,13065	0,4	1,1	0,17396
0,5	0,1	0,04238	0,5	0,6	0,15187	0,5	1,1	0,21372
0,6	0,1	0,04375	0,6	0,6	0,17103	0,6	1,1	0,25372
0,7	0,1	0,04482	0,7	0,6	0,18875	0,7	1,1	0,29477
0,8	0,1	0,04571	0,8	0,6	0,20551	0,8	1,1	0,33779
0,9	0,1	0,04646	0,9	0,6	0,22170	0,9	1,1	0,38387
1	0,1	0,04713	1	0,6	0,23766	1	1,1	0,43438
1,1	0,1	0,05998	1,1	0,6	0,25372	1,1	1,1	0,49118
1,2	0,1	0,07181	1,2	0,6	0,27020	1,2	1,1	0,55694
1,3	0,1	0,08686	1,3	0,6	0,28747	1,3	1,1	0,63566
1,4	0,1	0,10864	1,4	0,6	0,30596	1,4	1,1	0,73373

φ_m	φ_l	K_f	φ_m	φ_l	K_f	φ_m	φ_l	K_f
1,5	0,1	0,15061	1,5	0,6	0,32624	1,5	1,1	0,86224
0,1	0,2	0,03355	0,1	0,7	0,04482	0,1	1,2	0,04828
0,2	0,2	0,05067	0,2	0,7	0,08169	0,2	1,2	0,09395
0,3	0,2	0,06123	0,3	0,7	0,11312	0,3	1,2	0,13806
0,4	0,2	0,06850	0,4	0,7	0,14074	0,4	1,2	0,18155
0,5	0,2	0,07392	0,5	0,7	0,16568	0,5	1,2	0,22529
0,6	0,2	0,07818	0,6	0,7	0,18875	0,6	1,2	0,27020
0,7	0,2	0,08169	0,7	0,7	0,21057	0,7	1,2	0,31725
0,8	0,2	0,08468	0,8	0,7	0,23164	0,8	1,2	0,36764
0,9	0,2	0,08731	0,9	0,7	0,25242	0,9	1,2	0,42289
1	0,2	0,08968	1	0,7	0,27332	1	1,2	0,48502
1,1	0,2	0,09187	1,1	0,7	0,29477	1,1	1,2	0,55694
1,2	0,2	0,08340	1,2	0,7	0,31725	1,2	1,2	0,64303
1,3	0,2	0,11267	1,3	0,7	0,34133	1,3	1,2	0,75030
1,4	0,2	0,15491	1,4	0,7	0,36772	1,4	1,2	0,89085
1,5	0,2	0,23694	1,5	0,7	0,39740	1,5	1,2	1,08767
0,1	0,3	0,03788	0,1	0,8	0,04571	0,1	1,3	0,04880
0,2	0,3	0,06123	0,2	0,8	0,08468	0,2	1,3	0,09595
0,3	0,3	0,07733	0,3	0,8	0,11893	0,3	1,3	0,14243
0,4	0,3	0,08931	0,4	0,8	0,14986	0,4	1,3	0,18919
0,5	0,3	0,09875	0,5	0,8	0,17846	0,5	1,3	0,23718
0,6	0,3	0,10650	0,6	0,8	0,20551	0,6	1,3	0,28747
0,7	0,3	0,11312	0,7	0,8	0,23164	0,7	1,3	0,34133
0,8	0,3	0,11893	0,8	0,8	0,25740	0,8	1,3	0,40037
0,9	0,3	0,12418	0,9	0,8	0,28332	0,9	1,3	0,46678
1	0,3	0,12903	1	0,8	0,30992	1	1,3	0,54365
1,1	0,3	0,13362	1,1	0,8	0,33779	1,1	1,3	0,63566
1,2	0,3	0,13806	1,2	0,8	0,36764	1,2	1,3	0,75030
1,3	0,3	0,11597	1,3	0,8	0,40037	1,3	1,3	0,90052
1,4	0,3	0,17907	1,4	0,8	0,43718	1,4	1,3	1,11088
1,5	0,3	0,30129	1,5	0,8	0,47978	1,5	1,3	1,43459
0,1	0,4	0,04054	0,1	0,9	0,04646	0,1	1,4	0,04931
0,2	0,4	0,06850	0,2	0,9	0,08731	0,2	1,4	0,09793
0,3	0,4	0,08931	0,3	0,9	0,12418	0,3	1,4	0,14683
0,4	0,4	0,10569	0,4	0,9	0,15828	0,4	1,4	0,19702
0,5	0,4	0,11916	0,5	0,9	0,19054	0,5	1,4	0,24962
0,6	0,4	0,13065	0,6	0,9	0,22170	0,6	1,4	0,30596
0,7	0,4	0,14074	0,7	0,9	0,25242	0,7	1,4	0,36772
0,8	0,4	0,14986	0,8	0,9	0,28332	0,8	1,4	0,43718
0,9	0,4	0,15828	0,9	0,9	0,31503	0,9	1,4	0,51758
1	0,4	0,16626	1	0,9	0,34827	1	1,4	0,61382
1,1	0,4	0,17396	1,1	0,9	0,38387	1,1	1,4	0,73373
1,2	0,4	0,18155	1,2	0,9	0,42289	1,2	1,4	0,89085
1,3	0,4	0,18919	1,3	0,9	0,46678	1,3	1,4	1,11088
1,4	0,4	0,18796	1,4	0,9	0,51758	1,4	1,4	1,44947
1,5	0,4	0,35207	1,5	0,9	0,57839	1,5	1,4	2,05430
0,1	0,5	0,04238	0,1	1	0,04713	0,1	1,5	0,03940
0,2	0,5	0,07392	0,2	1	0,08968	0,2	1,5	0,07960
0,3	0,5	0,09875	0,3	1	0,12903	0,3	1,5	0,12147
0,4	0,5	0,11916	0,4	1	0,16626	0,4	1,5	0,16603
0,5	0,5	0,13657	0,5	1	0,20221	0,5	1,5	0,21453
0,6	0,5	0,15187	0,6	1	0,23766	0,6	1,5	0,26865
0,7	0,5	0,16568	0,7	1	0,27332	0,7	1,5	0,33076
0,8	0,5	0,17846	0,8	1	0,30992	0,8	1,5	0,40433
0,9	0,5	0,19054	0,9	1	0,34827	0,9	1,5	0,49486
1	0,5	0,20221	1	1	0,38935	1	1,5	0,61159
1,1	0,5	0,21372	1,1	1	0,43438	1,1	1,5	0,77155
1,2	0,5	0,22529	1,2	1	0,48502	1,2	1,5	1,01008
1,3	0,5	0,23718	1,3	1	0,54365	1,3	1,5	1,41454
1,4	0,5	0,24962	1,4	1	0,61382	1,4	1,5	2,27682
1,5	0,5	0,39267	1,5	1	0,70125			

Tabla 4. Expresiones del área A para cada geometría de sección de la carga

Geometría	Expresiones del área A para cada geometría de sección de la carga	
Triangular	$A = b_0^2 \frac{\tan(\varphi_m)}{4}$	
Parabólica	Grado n	$A = b_0^2 \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right) \tan(\varphi_m)$
	Grado 2	$A = b_0^2 \frac{1}{3} \tan(\varphi_m)$
Semi-elíptica	$A = b_0^2 \frac{\pi}{8} \tan(\varphi_m)$	
Hiperbólica	$A = b_0^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{\tan^2(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{[\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)]^2} \operatorname{Ln} \left[\frac{\tan(\varphi_m)}{\tan(\varphi_t)} \right] \right\}$ $b_0^2 \frac{1}{2} \left\{ - \frac{\tan(\varphi_m) \tan(\varphi_t)}{\tan(\varphi_m) - \tan(\varphi_t)} \right\}$	

La Figura 6 muestra el diagrama de flujo que sistematiza los procedimientos para el cálculo del área de la sección de la carga para cada caso estudiado. Se propone tomar $\lambda=60^\circ$ (ángulo que marca la diferencia entre el modelo hiperbólico y el modelo parabólico).

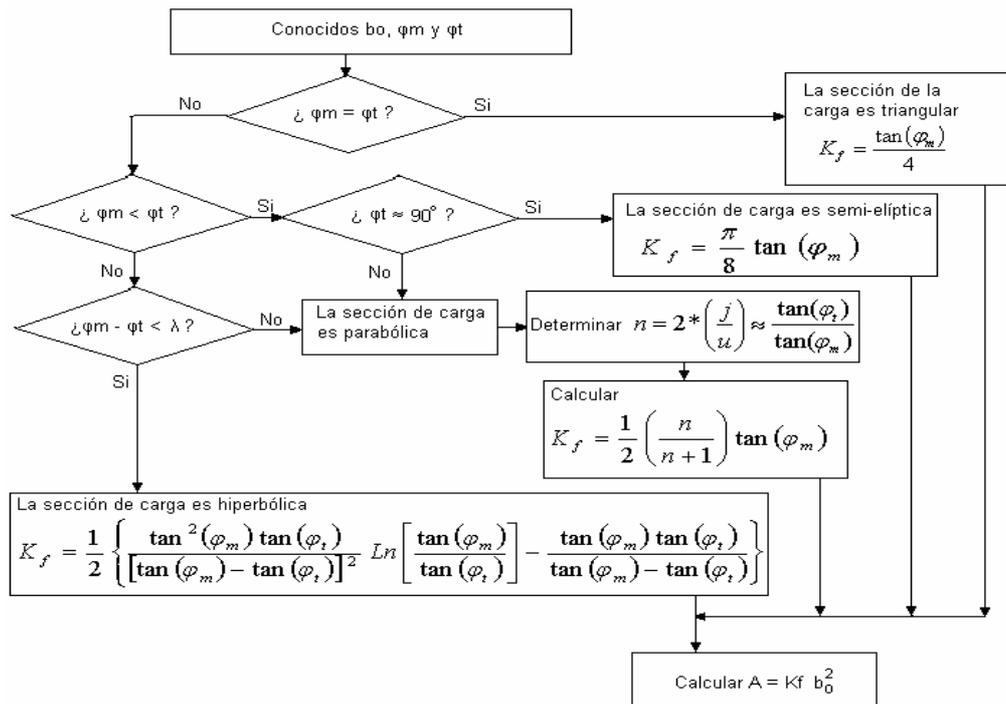


Figura 6. Diagrama de flujo para el cálculo del área de la sección de la carga.

Es conveniente destacar las mejoras de precisión que se obtienen cuando son utilizadas las fórmulas pertinentes en cada caso. Para ello podemos observar en la Tabla 5 el error relativo porcentual que se comete cuando se asume el valor tringular K_{fT} (esto es, cuando se asume que $\varphi_m = \varphi_t$) en lugar del valor real K_{fR} :

$$e = 100 \frac{K_{fR} - K_{fT}}{K_{fR}} \tag{48}$$

Tabla 5. Valores del error relativo e en función de φ_m y φ_t dados en radianes

φ_m	φ_t	e	φ_m	φ_t	e	φ_m	φ_t	e
0,1	0,1	0,00	0,1	0,6	42,67	0,1	1,1	47,45
0,2	0,1	-51,02	0,2	0,6	35,18	0,2	1,1	44,84
0,3	0,1	-104,15	0,3	0,6	27,39	0,3	1,1	42,13
0,4	0,1	-160,69	0,4	0,6	19,10	0,4	1,1	39,24
0,5	0,1	-222,24	0,5	0,6	10,07	0,5	1,1	36,10
0,6	0,1	-290,93	0,6	0,6	0,00	0,6	1,1	32,59
0,7	0,1	-369,74	0,7	0,6	-11,56	0,7	1,1	28,57
0,8	0,1	-463,10	0,8	0,6	-25,25	0,8	1,1	23,80
0,9	0,1	-577,98	0,9	0,6	-42,10	0,9	1,1	17,93
1	0,1	-726,11	1	0,6	-63,82	1	1,1	10,37
1,1	0,1	-718,81	1,1	0,6	-93,59	1,1	1,1	0,00
1,2	0,1	-795,41	1,2	0,6	-137,99	1,2	1,1	-15,46
1,3	0,1	-936,64	1,3	0,6	-213,26	1,3	1,1	-41,67
1,4	0,1	-1234,13	1,4	0,6	-373,74	1,4	1,1	-97,55
1,5	0,1	-2240,59	1,5	0,6	-980,60	1,5	1,1	-308,86
0,1	0,2	25,25	0,1	0,7	44,04	0,1	1,2	48,05
0,2	0,2	0,00	0,2	0,7	37,97	0,2	1,2	46,06
0,3	0,2	-26,30	0,3	0,7	31,64	0,3	1,2	43,99
0,4	0,2	-54,29	0,4	0,7	24,90	0,4	1,2	41,78
0,5	0,2	-84,75	0,5	0,7	17,57	0,5	1,2	39,38
0,6	0,2	-118,75	0,6	0,7	9,39	0,6	1,2	36,70
0,7	0,2	-157,76	0,7	0,7	0,00	0,7	1,2	33,63
0,8	0,2	-203,97	0,8	0,7	-11,12	0,8	1,2	29,98
0,9	0,2	-260,83	0,9	0,7	-24,81	0,9	1,2	25,50
1	0,2	-334,15	1	0,7	-42,45	1	1,2	19,73
1,1	0,2	-434,62	1,1	0,7	-66,63	1,1	1,2	11,81
1,2	0,2	-670,94	1,2	0,7	-102,69	1,2	1,2	0,00
1,3	0,2	-699,25	1,3	0,7	-163,83	1,3	1,2	-20,02
1,4	0,2	-835,68	1,4	0,7	-294,17	1,4	1,2	-62,70
1,5	0,2	-1387,86	1,5	0,7	-787,09	1,5	1,2	-224,12
0,1	0,3	33,78	0,1	0,8	45,13	0,1	1,3	48,61
0,2	0,3	17,23	0,2	0,8	40,16	0,2	1,3	47,19

φ_m	φ_t	e	φ_m	φ_t	e	φ_m	φ_t	e
0,3	0,3	0,00	0,3	0,8	34,98	0,3	1,3	45,71
0,4	0,3	-18,34	0,4	0,8	29,47	0,4	1,3	44,13
0,5	0,3	-38,30	0,5	0,8	23,47	0,5	1,3	42,42
0,6	0,3	-60,58	0,6	0,8	16,78	0,6	1,3	40,50
0,7	0,3	-86,14	0,7	0,8	9,10	0,7	1,3	38,31
0,8	0,3	-116,43	0,8	0,8	0,00	0,8	1,3	35,71
0,9	0,3	-153,69	0,9	0,8	-11,19	0,9	1,3	32,51
1	0,3	-201,73	1	0,8	-25,63	1	1,3	28,38
1,1	0,3	-267,58	1,1	0,8	-45,41	1,1	1,3	22,73
1,2	0,3	-365,75	1,2	0,8	-74,91	1,2	1,3	14,30
1,3	0,3	-676,46	1,3	0,8	-124,92	1,3	1,3	0,00
1,4	0,3	-709,44	1,4	0,8	-231,55	1,4	1,3	-30,48
1,5	0,3	-1070,07	1,5	0,8	-634,78	1,5	1,3	-145,74
0,1	0,4	38,13	0,1	0,9	46,02	0,1	1,4	49,13
0,2	0,4	26,03	0,2	0,9	41,96	0,2	1,4	48,25
0,3	0,4	13,42	0,3	0,9	37,73	0,3	1,4	47,33
0,4	0,4	0,00	0,4	0,9	33,22	0,4	1,4	46,35
0,5	0,4	-14,61	0,5	0,9	28,32	0,5	1,4	45,29
0,6	0,4	-30,91	0,6	0,9	22,86	0,6	1,4	44,10
0,7	0,4	-49,61	0,7	0,9	16,58	0,7	1,4	42,74
0,8	0,4	-71,77	0,8	0,9	9,15	0,8	1,4	41,12
0,9	0,4	-99,03	0,9	0,9	0,00	0,9	1,4	39,13
1	0,4	-134,18	1	0,9	-11,79	1	1,4	36,57
1,1	0,4	-182,35	1,1	0,9	-27,96	1,1	1,4	33,06
1,2	0,4	-254,19	1,2	0,9	-52,06	1,2	1,4	27,82
1,3	0,4	-375,99	1,3	0,9	-92,92	1,3	1,4	18,94
1,4	0,4	-671,14	1,4	0,9	-180,05	1,4	1,4	0,00
1,5	0,4	-901,30	1,5	0,9	-509,51	1,5	1,4	-71,61
0,1	0,5	40,82	0,1	1	46,78	0,1	1,5	36,34
0,2	0,5	31,45	0,2	1	43,49	0,2	1,5	36,34
0,3	0,5	21,69	0,3	1	40,07	0,3	1,5	36,34
0,4	0,5	11,30	0,4	1	36,43	0,4	1,5	36,34
0,5	0,5	0,00	0,5	1	32,46	0,5	1,5	36,34
0,6	0,5	-12,62	0,6	1	28,04	0,6	1,5	36,34
0,7	0,5	-27,09	0,7	1	22,96	0,7	1,5	36,34
0,8	0,5	-44,24	0,8	1	16,94	0,8	1,5	36,34
0,9	0,5	-65,34	0,9	1	9,54	0,9	1,5	36,34
1	0,5	-92,54	1	1	0,00	1	1,5	36,34
1,1	0,5	-129,82	1,1	1	-13,08	1,1	1,5	36,34
1,2	0,5	-185,41	1,2	1	-32,58	1,2	1,5	36,34
1,3	0,5	-279,68	1,3	1	-65,64	1,3	1,5	36,34
1,4	0,5	-480,65	1,4	1	-136,14	1,4	1,5	36,34
1,5	0,5	-797,78	1,5	1	-402,72			

Cuando $e > 0$ se tiene que el valor real K_{fR} es menor que el valor triangular asumido K_{fT} y esto trae como consecuencia que el área calculada tendrá mayor valor que el área verdadera, por tanto la productividad y otros parámetros que dependen del área estarán sobredimensionados. Intuitivamente se evidencia que el transportador diseñado bajo estas condiciones será más costoso y menos eficiente.

Por el contrario, cuando $e < 0$ entonces el valor real K_{fR} es mayor que el valor triangular asumido K_{fT} y esto trae como consecuencia que el área calculada tendrá menor valor que el área verdadera. En este caso puede intuirse que el transportador está subdimensionado y por tanto propenso a fallas prematuras.

CONCLUSIONES

No toda carga a granel que se deposita sobre una superficie plana horizontal adoptará forma triangular en su sección. La forma de la sección de la carga que se deposita a granel sobre una superficie plana horizontal es función de la relación entre los ángulos φ_m y φ_{tt} , siendo φ_m el ángulo entre la horizontal y la línea que une a uno de los extremos de la base de la carga y el punto máximo del contorno de la misma y φ_{tt} el ángulo entre la horizontal y la tangente a la curva del contorno, trazada en uno de los extremos de la base de la carga.

Al calcular el área de la sección de la carga en función de la geometría real que ésta adopta al depositarse sobre una superficie horizontal plana, se puede observar que este valor difiere notablemente en comparación con el que se obtiene cuando se asume erróneamente que dicha sección es triangular. Por ejemplo, si la geometría real fuese parabólica cuadrática y fuera considerada triangular, entonces el error es de un 8,33 % como se obtiene si calculamos la diferencia entre las ecuaciones 5 y 21.

REFERENCIAS

- AGUILAR-PARÉS, FRANCISCO. 2002: *Máquinas de Transporte Continuo*. Ediciones CUJAE, La Habana, 320 p.
- ALEXANDROV, M. 1976: *Aparatos y máquinas de elevación y transporte*. Editorial Mir, Moscú, 562 p.

- ALEXANDROV, A. & KULESHOV, B. 1986: *Investigación y establecimiento de los regímenes de la transportación*. Dshezkazgan GMK. Leningrado, 413 p.
- ALSPAUGH, M. A & DEWICKI, G. 2009: Advanced design considerations required for overland aggregate conveyors [on line]. Consulta: 9 mayo 2009. Disponible en: www.Overlandconveyor.com
- ALSPAUGH, M. A. 2004: Latest Developments in Belt Conveyor Technology. Overland Conveyor Co., Inc. En MINExpo 2004, Las Vegas [Memorias], NV, USA, 27 Septiembre, 145-166.
- KREYSZIG, E. 2006: *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería*. Volumen I. Editorial LIMUSA. 367 p.
- LARRADE, E. & MIRAVETE, A. 1996: *Transportadores y Elevadores*. Editorial Reverté. 455 p.
- LAUHOFF, H. 2005: Control de Velocidad en Correas Transportadoras - ¿Realmente Ahorra Energía?". *Bulk Solids Handling* [en línea] 25 (6) Consulta: 5 enero 2006. Disponible en: www.synergy-eng.com/spanish/pdf/
- LAUHOFF, H. 1987: Belt Conveyors for Horizontal Curves – The Key to Reducing Material Handling Costs. *Cement-Lime-Gypsum International*, april 40(4) :32-46.
- LIEBERWIRTH, HOLGER. 1996: Design of Belt Conveyors with Horizontal Curves. Manager Projects for Material Handling Systems. Krupp Frdertechnik GmbH, Franz-Schubert-Strasse 1-3, D-47226 Duisberg, Germany, 614 p.
- ORIOLO, G. & AGUILAR, F. 1992: *Máquinas de Transporte Continuo*. Tomo I. Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 386 p.
- RUBBER, N. 2006: *Bandas transportadoras. Manual de Selección*. Editorial Rubber, Madrid, 254 p.
- SWOKOWSKI, C. 2002: *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 10 Ed. Thomson Learning, Londres, 480 p.

Claudio José Ricaurte Machado

claudioricaurtee2@hotmail.com

Master en Ciencias Electromecánicas. Profesor Auxiliar Instituto Universitario de Tecnología Dr. Federico Rivero Palacio, Km 8 de la Carretera a Los Teques, Caracas, Venezuela.

Aristides Alejandro Legrá Lobaina

alegra@ismm.edu.cu

Doctor en Ciencias Técnicas Profesor Auxiliar. Instituto Superior Minero Metalúrgico, Las Coloradas, s/n, Moa, Holguín, Cuba.