© REVISTA MINERIA Y GEOLOGIA , 3-85

CDU: 528.31:537.226.5 (729.1)

# CONDICIONES DE CONTORNO PARA LA ECUACION DE LAPLACE EN UN MEDIO ANISOTROPO POLARIZADO VOLUMETRICAMENTE

C.Dr. Josè A. Dìaz D. Centro Universitario de Pinar del Rìo.

RESUMEN

*En el trabajo se establece la forma general de la condiciòn de continuidad del componente normal de densidad de corriente en la superficie de separaciòn de dos semiespacios anisòtropos polarizados volumètricamente. Cada uno de estos semiespacios se caracteriza por poseer rocas con conductividades elèctricas especificas y polaridades tangenciales y normales considerando la existencia de la propiedad simètrica del tensor de susceptibilidad de polarizaciòn del medio.*

*Al final se analizan dos de los ocho casos particulares de la expresiòn general determinada.*

ABSTRACT

*In this work, it is stated the general form of the condition of continuity of the normal component of the current density along the surface of separation of two anisotropic semispaces volumetrically polarized. Each of these semispaces is characterized because it has rocks with tangential and normal, components of the specific resistance and polarizabity of the medium.*

*Finally, two of the eight particular cases of the general expresion are analyzed.*

## INTRODUCCION

**El desarrollo teórico del método de polarización inducida exige el análisis de las nuevas condiciones de contorno que tienen lugar en la solución de la ecuación de Laplace en un medio anisótropo con una frontera horizontal que lo divide en dos semiespacios.**



**El estudio del comportamiento de la polarizabilidad aparente en los medios anisótropos reviste una extraordinaria importancia teórica y práctica en relación con el aumento de la efectividad del método de polarización inducida durante la búsqueda de yacimientos minerales [ 1 ] , y para ello se requiere dejar establecidas las condiciones de frontera que permitan resolver cualquier tarea directa por este método.**

### *ANISOTROPIA DE LA POLARIZABILIDAD*

**La anisotropía es un rasgo característico de todo medio geológico, de ello se deduce que las propiedades físicas que le son propias se representen mediante funciones tensoriales; tal es el caso de la susceptibilidad de polarización o sus equivalentes polarizabilidad y cargabilidad [ 2 ].**

**La consideración del tensor de la susceptibilidad de polarización conduce a la determinación de dos componentes principales de la densidad de corriente en un medio anisótropo: la componente tangencial y la normal al mismo [ 2 ].**

$$J_t = \sigma_t \ (1 - \eta_t) \ E_t \qquad (1)$$

$$J_n = \sigma_n \ (1 - \eta_n) \ E_n \qquad (2)$$

**en donde $\eta = 4 \pi C$ resulta ser la polarizabilidad del medio con susceptibilidad de polarización con sus dos componentes, en tanto $\sigma_t$ y $\sigma_n$ son las conductividades eléctricas específicas, longitudinal y normal respectivamente.**

### *CONDICIONES DE CONTORNO EN UN MEDIO ANISOTROPO POLARIZADO VOLUMETRICAMENTE*

**El potencial del campo de polarización, al igual que el potencial del campo primario, satisface la ecuación de Laplace**

$$\Delta U = 0 \qquad (3)$$

**Ha sido establecido [ 4 ] que para la polarización volumétrica las condiciones de contorno, utilizadas para resolver la ecuación (8), tienen la siguiente forma:**

$$U_1 - U_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\sigma_1 \ (1-\eta_1) \ \frac{\partial U_1}{\partial N} = \sigma_2 \ (1-\eta_2 \ \frac{\partial U_2}{\partial N} \qquad (5)$$

**También es conocido [ 4 ] que para hallar la expresión del campo en el caso de la polarización volumétrica del medio, se procede a la sustitución, en la expresión del campo primario, de la conductividad eléctrica de cada uno de los medios $\sigma_i$, por la conductividad eléctrica ficticia $\sigma_i*$ , la cual considera a la polarizabilidad:**

$$\sigma_i^* = \sigma_i \; (1 - \eta_i) \qquad (6)$$

**Este procedimiento, basado en la utilización de las soluciones conocidas de la ecuación de Laplace en la exploración eléctrica por corriente constante, fue fundamentado e introducido prácticamente al mismo tiempo por H.O. Seigel y V.A. Komarov .**

**En la figura 1 está representado un esquema de un medio anisótropo con una frontera horizontal que separa a dos semiespacios. Cada uno de ellos se caracteriza por poseer rocas con conductividades eléctricas específicas, tangenciales y normales** $( \sigma_t , \sigma_n )$ **, con polarizabilidades tangenciales y normales** $( \eta_t , \eta_n )$ .

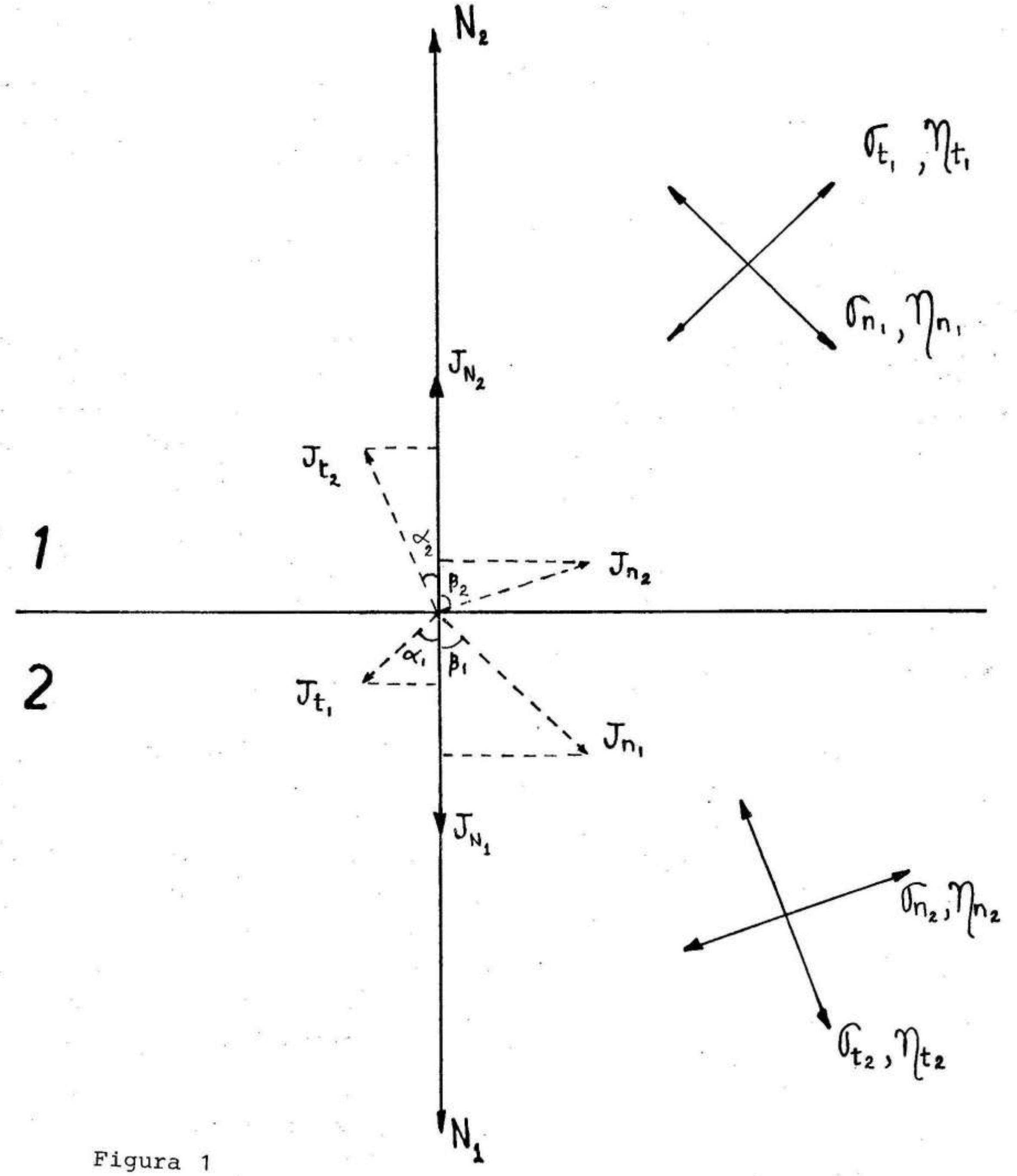


Figura 1



**Examinemos la segunda condición de contorno dada por la expresión (5), es decir, la continuidad del componente normal de densidad de corriente en la frontera de separación :**

$$J_{N1} = J_{N2} \qquad (7)$$

**De la propia figura 1 se desprende que**

$$J_{N1} = J_{t1} \cos \alpha_1 + J_{n1} \cos \beta_1 \qquad (8)$$

$$J_{N2} = J_{t2} \cos \alpha_2 + J_{n2} \cos \beta_2 \qquad (9)$$

**Consideremos entonces las expresiones (1) y (2) para el caso que estamos analizando :**

$$J_{t1} = \sigma_{t1} \; (1 - \eta_{t1}) \; E_{t1} \qquad (10)$$

$$J_{n1} = \sigma_{n1} \; (1 - \eta_{n1}) E_{n1} \qquad (11)$$

$$J_{t2} = \sigma_{t2} \; (1 - \eta_{t2}) E_{t2} \qquad (12)$$

$$J_{n2} = \sigma_{n2} \; (1 - \eta_{n2}) E_{n2} \qquad (12)$$

**De esta forma, las expresiones (8) y (9) se transforman en**

$$J_{N1} = \sigma_{t1} \; (1 - \eta_{t1}) \; E_{t1} \cos \alpha_1 + \sigma_{n1} \; (1 - \eta_{n1}) \; E_{n1} \cos \beta_1 \qquad (14)$$

$$J_{N2} = \sigma_{t2} \; (1 - \eta_{t2}) \; E_{t2} \cos \alpha_2 + \sigma_{n2} \; (1 - \eta_{n2}) \; E_{n2} \cos \beta_2 \qquad (15)$$

**Por tanto, la condición de continuidad del componente normal de densidad de corriente en la superficie de separación de dos medios anisótropos polarizados volumétricamente queda de la siguiente forma:**

$$\sigma_{t1} \; (1 - \eta_{t1}) \; E_{t1} \cos \alpha_1 + \sigma_{n1} \; (1 - \eta_{n1}) \; E_{n1} \cos \beta_1 = \sigma_{t2} \; (1 - \eta_{t2}) \; E_{t2} \cos \alpha_2 + \sigma_{n2} \; (1 - \eta_{n2}) \; E_{n2} \cos \beta_2 \qquad (16)$$

**Esta expresión puede ser simplificada en el caso de ausencia de la anisotropía de conductividad eléctrica, esto es, si**

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{n1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{t2} = \sigma_{n2} = \sigma_2$$

**Es muy importante tener en cuenta que en la expresión (16) intervienen no sólo las componentes normales de la densidad de corriente** $(J_{n1}, J_{n2})$ **en cada semiespacio, sino también las tangenciales** $(J_{t1}$ $J_{t2})$.

**En la figura 2 están representados los ocho casos particulares de simplificación de la condición 16).**

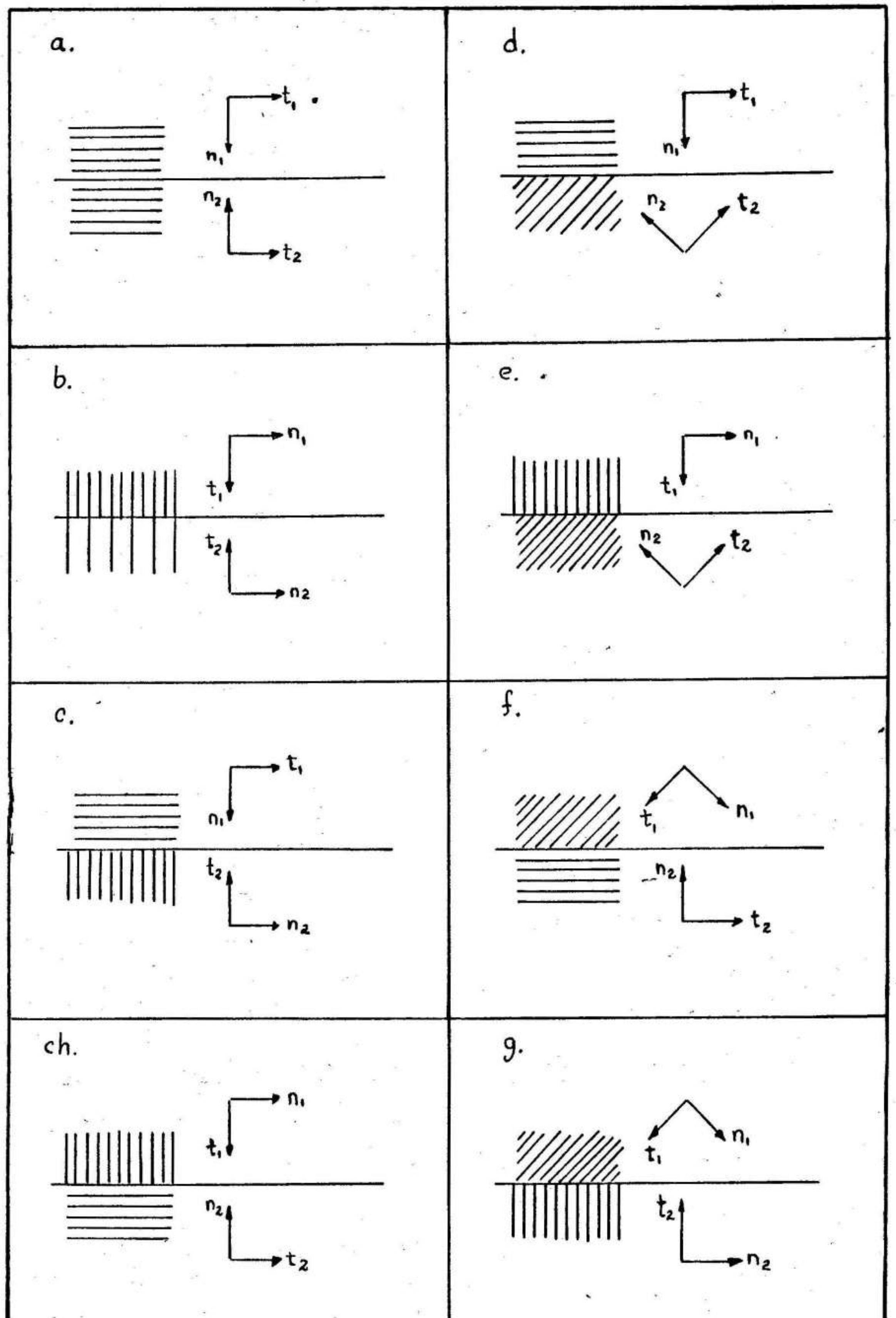


Figura 2



**Veamos algunas de las expresiones que le corresponderían:**

$$\text{a)}\quad \sigma_{n1}\,(1-\eta_{n1})\,E_{n1} = \sigma_{n2}\,(1-\eta_{n2})\,E_{n2} \qquad (17)$$

Puesto que $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^{o}$ y $\beta_1 = \beta_2 = 0$

**Como puede apreciarse esta es la expresión de continuidad del componente normal de densidad de corriente que habitualmente hemos considerado, y ella no es más que uno de los casos particulares de (16).**

$$\text{b)}\quad \sigma_{t1}\,(1-\eta_{t1})\,E_{t1} = \sigma_{t2}\,(1-\eta_{t2})\,E_{t2}$$

Puesto que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y $\beta_1 = \beta_2 = 90^{\circ}$ (18)

**Esta expresión, aunque para situaciones geológicas verdaderamente excepcionales, constituye una interesante paradoja: la continuidad del componente normal de la densidad de corriente viene dada por las componentes tangenciales de densidad en cada semiespacio anisótropo considerado.**

**Las expresiones para los restantes seis casos, así como las consideraciones derivadas de ellas son evidentes.**

## CONCLUSIONES

1. **En la condición de continuidad del componente normal de densidad de corriente en la superficie de separación de dos medios anisótropos polarizados volumétricamente, intervienen no sólo las componentes normales de la densidad de corriente en cada semiespacio, sino también los tangenciales.**

2. **La forma general de la condición de contorno analizada comprende ocho casos particulares, uno de los cuales es la expresión de continuidad de la componente normal de densidad de corriente en un medio anisótropo.**

## REFERENCIAS


1. *DIAZ, D.J.: "Utilizaciòn del mètodo de polarizaciòn inducida para las bùsquedas de yacimientos polimetàlicos en la provincia de Pinar del Rìo". Tesis para el grado de Candidato en Ciencias geòlogo-mineralògicas. Moscù, 1982.*

2. *________.: "El tensor de la susceptibilidad de polarizaciòn", en Revista Mineria y Geologia, Nº.1, 1985.*

3. *KOMAROV, V.A.: "Fundamentos de la utilizaciòn del mètodo de polarizaciòn inducida en las busquedas de yacimientos minerales", en Metodologia y tècnica de exploraciòn, Nº.23, 1960.*

4. *________.: Exploraciòn elèctrica por el mètodo de polarizaciòn inducida. 2da. ed. Moscù, Ed. Niedra, 1980.*

5. *SEIGEL, H.O.: "Mathematical formulation and type curves forinduced polarization", en Geophgsics, Nº.3, 1959.*