

# Estimación del error de geometrización empleando la geoestadística transitiva

Adrián Martínez Vargas<sup>1</sup> / amvargas@ismm.edu.cu

## RESUMEN

La geoestadística transitiva, teoría olvidada casi por completo, permite deducir una fórmula para evaluar el error geométrico en el que se incurre al geometrizar un depósito con límites no conocidos. Dicho error no depende directamente de la variabilidad espacial de las funciones aleatorias, sino de la relación entre el perímetro y el área del cuerpo mineralizado. Para su cálculo se supone el depósito definido en un dominio  $D$ , discretizado como una rejilla cuadrada con unidades de selectividad  $d$ . Es función del parámetro  $N$ , que representan el número de unidades elementales mineralizadas, así como de  $N_1$  y  $N_2$ , los que se asocian al número de vértices en contacto con unidades elementales no mineralizadas en las direcciones principales de la rejilla. En algunos yacimientos con cuerpos continuos y de gran tamaño converge rápidamente a cero.

## PALABRAS CLAVE

Geoestadística Transitiva, Error Geométrico

# Geometric error estimation using transitive geostatistic

## ABSTRACT

Transitive geostatistic, theory almost lost in time, is a way to deduce a formula to evaluate the geometric error associated to the evaluation of an orebody with unknown limits. The error does not depend directly on the random functions spatial variability, but depend on the orebody perimeter and area. To calculate this error the orebody, defined in the domain  $D$ , is discretized as square grid with selectivity units  $d$ . It is function of the parameter  $N$ , which represents the number of selectivity units in the orebody. It is also function of parameters  $N_1$  and  $N_2$ , which are associated to the number of vertices in the orebody contour along grid main axis directions. In some deposits with continuous and big orebodies it converges quickly to zero.

## KEY WORDS

Transitive Geostatistics, Geometric Error

## INTRODUCCIÓN

El error total con que se estiman de los recursos minerales es la suma de errores específicos, como los de medición, los de interpolación y de geometrización de los recursos. Este último es usualmente obviado, sin embargo, puede alcanzar magnitudes importantes en algunos yacimientos.

El error de geometrización es aquel asociado a la delimitación del cuerpo mineral, y es de particular importancia en aquellos casos donde la minería selectiva se enfrenta al reto de extraer unas pocas unidades dispersas en una gran maza de material no menífero. En este trabajo se analiza los principales aspectos que intervienen y afectan su cálculo.

## MATERIALES Y MÉTODOS

El error con que se estiman los recursos y reservas se define como la diferencia del valor real y el estimado:

$$\varepsilon = Z^*(D) - Z(D) \quad [1]$$

Donde  $Z^*$  y  $Z$  son las funciones aleatorias estimada y la real, definidas en el espacio  $D$  que ocupa el yacimiento. Pero  $Z(D)$  no se conoce hasta que el yacimiento no es minado, entonces un procedimiento usual es buscar un estimador que garantice la condición de no sesgo:

$$E(\varepsilon) = E(Z^*(D) - Z(D)) = 0 \quad [2]$$

y que minimice la varianza del error, definida como:

$$\text{Var}(\varepsilon) = \text{Var}(Z^*(D) - Z(D)) \geq 0 \quad [3]$$

A partir de la ecuación [2] y [3] se deducen las ecuaciones de kriging (Armstrong, 1998, p. 85).

La varianza del error se nutre de varias fuentes que incrementan la diferencia entre  $Z^*(D)$  y  $Z(D)$ ; además, depende de los valores de  $Z(x)$  y su arreglo espacial, pero no tiene en cuenta de manera explícita la forma del depósito  $D$ , o al menos, la parte que será explotada.

Solo la parte del yacimiento que está por encima de un cutoff  $z_c$  nos interesa, por lo que es usual dividir el yacimiento  $D$  en paneles o bloques  $d$ , a los que se le asigna los valores indicatrices  $I(d)=1$  cuando  $Z^*(d) \geq z_c$  y  $I(d)=0$  en caso contrario. La suma de los paneles o bloques con  $I(d)=1$  nos da el volumen del yacimiento que se extrae, dicho volumen se puede estimar empleando métodos no lineales de estimación de recursos.

Una vez comenzada la explotación se extraen las unidades elementales que cumplen la condición  $I(d)=1$ , y el yacimiento  $D$  se convierte en uno  $D'$  con límites complejos y desconocidos,  $D''$  es su complemento. Entonces la incertidumbre acerca de la forma del yacimiento introduce una fuente de error extra conocida como error de geometrización.

Una vía para calcular el error de geometrización es la teoría de la geoestadística transitiva. Fue creada por Matheron en 1965 para obtener un estimador basado puramente en términos espaciales (tomado de Chilès, 1999, p. 24). Bajo este enfoque la variable regionalizada  $z(x)$  es determinística y se asume idéntica a cero fuera de los límites del dominio  $D$ , éste es el llamado fenómeno de transición.

En este modelo la aleatoriedad se introduce a través del muestreo, empleando el método de Monte Carlos y seleccionando  $N$  muestras aleatoriamente, de forma independiente. Esto conduce a un estimador insesgado con una varianza igual a  $\sigma^2 / N$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza espacial de  $z(x)$ .

Para estimar los recursos globales basta con calcular la integral

$$Q = \int z(x) dx \quad [4]$$

Esta es finita mientras  $z(x)$  sea cero fuera del dominio  $D$ , si  $z(x)$  es un indicador entonces,  $Q$  es el volumen de  $D$ , si es el contenido en metal (g/ton) entonces  $Qm$  es la cantidad de metal en el depósito, donde  $m$  es una constante de densidad. Para implementar este modelo se asume además que  $D$  se discretizó en una rejilla regular que se extiende suficientemente fuera de sus límites.

Denótese por  $a$  el espaciado elemental de una rejilla en  $R^n$  y  $|a|$  su volumen, el origen es denotado por  $x_0$  y  $k$  es un set de enteros positivos y negativos; el estimador de  $Q$  es:

$$Q^*(x_0) = |a| \sum_{k \in Z^n} z(x_0 + ka) \quad [5]$$

Si se selecciona el origen de  $x_0$  de forma aleatoria y uniforme en el paralelepípedo  $\Pi = [0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n]$ , entonces  $Q^*$  se convierte en una variable aleatoria cuyo valor esperado es

$$E\{Q^*\} = \frac{1}{|a|} \int_{\Pi} Q^*(x_0) dx_0 = \frac{1}{|a|} \int_{\Pi} dx_0 |a| \sum_k z(x_0 + ka) = \int z(x) dx = Q \quad [6]$$

Este es definitivamente insesgado.

El covariograma transitivo  $g(h)$  se define como

$$g(h) = \int z(x)z(x+h)dx \quad [7]$$

De forma similar se deduce que

$$E\{Q^*\}^2 = |a| \sum_k g(ka) \quad [8]$$

y

$$Q^2 = \int g(h)dh \quad [9]$$

Entonces la varianza del error  $Q^* - Q$ , también llamada varianza de estimación, está dada por la fórmula

$$E\{Q^* - Q\}^2 = |a| \sum_k g(ka) - \int g(h)dh \quad [10]$$

Esta varianza, usualmente denotada por  $\sigma^2(a)$ , aparece como el error en el que se incurre al aproximar la integral  $\int g(h)dh$  a partir de una suma discreta sobre el grid, esta decrece a medida que el grid se hace más fino y la función  $z(x)$  más suave. El variograma transitivo es siempre no negativo, debido a que se modela con una función positiva definida. Este se relaciona a los modelos de la covarianza no centrada de las funciones aleatorias por la expresión

$$C_R(h) = \frac{1}{K(h)} \int_{D \cap D_{-h}} z(x)z(x+h)dx \quad [11]$$

donde

$$K(h) = |D \cap D_{-h}| \quad [12]$$

Por lo tanto

$$g(h) = K(h)C_R(h) \quad [13]$$

La varianza de estimación se puede descomponer en dos términos, según las series de Euler Mac-Laurin, para  $a$  pequeños:

$$\sigma^2(a) = T_1(a) + T_2(a) \quad [14]$$

El primer término  $T_1(a)$  está relacionado al comportamiento de  $g(h)$  cerca del origen, el segundo  $T_2(a)$  depende del comportamiento cerca del rango  $b$ , para el cual  $g(h)=0$ .  $T_2(a)$  es el *termino*

*fluctuante*, y es una función periódica del resto  $\varepsilon$  de la división entera  $b/a$  y no puede evaluarse a partir de la data; tiene media cero, por lo que simplemente es ignorado.

El término regular  $T_1(a)$  se aproxima a partir de la expansión de  $g(h)$ . En 2D y para un covariograma isotrópico con comportamiento lineal cerca del origen el resultado explícito es

$$\sigma^2(a) = \sigma^2(a_1, a_2) \cong -g'(+0) \left[ \frac{1}{6} a_1^2 a_2 + 0.0609 a_2^3 \right] \quad a_1 \leq a_2 \quad [15]$$

Donde  $g'(+0)$  es la pendiente de  $g(h)$  en el origen, siempre menor que cero.

Si  $z(x)$  es un indicador el variograma es necesariamente lineal en el origen (vea Armstrong et al., 2003, p. 16), entonces de esta ecuación se deduce la varianza adimensional expresada en como:

$$\frac{\sigma_A^2}{A^2} \cong \frac{D'}{\sqrt{A}} \frac{1}{N^{3/2}} \left[ \frac{1}{6} \sqrt{\lambda} + 0.0609 \lambda^{-3/2} \right] \quad \lambda = \frac{a_1}{a_2} \leq 1 \quad [16]$$

Donde  $D'$  se conoce como el diámetro total y se calcula contando los segmentos del borde del objeto a lo largo de las direcciones  $a_1$  y  $a_2$ , incluyendo los posibles huecos en el contorno del cuerpo mineralizado

$$D' = N_1 a_1 = N_2 a_2 \quad [17]$$



Remplazando en la ecuación [16] se obtiene

$$\frac{\sigma_A^2}{A^2} \cong \frac{1}{N^2} \left[ \frac{1}{6} N_2 + 0.0609 \frac{N_1^2}{N_2} \right] \quad N_2 \leq N_1 \quad [18]$$

Esta fórmula también se puede aplicar si existe anisotropía con direcciones de la elongación principal paralelas a las direcciones de los ejes del grid, para ello se realiza una corrección afín, la que solo afecta el valor de  $A^2$ .

Suponiendo que el yacimiento en cuestión será explotado por el método de bancos, donde cada nivel se considera "independiente" la formula se aplica nivel a nivel y la influencia del error geométrico en la dirección vertical no se tenida en cuenta.

Consideremos un depósito donde solo una unidad elemental, en el espacio 2D, satisface la condición  $I(d)=1$ . El número de segmentos  $a_1 = a_2 = 2$ , por lo que  $N_1 = N_2 = 1$  y

$$\frac{\sigma_A^2}{A^2} \cong \frac{1}{1^2} \left[ \frac{1}{6} 1 + 0.0609 \frac{1}{1} \right] = 0.228$$

## **DISCUSIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DE LA EVALUACIÓN DEL ERROR GEOMÉTRICO**

Para usar la expresión [18] se asume que el sistema es isotrópico, pero a nivel local esto no se cumple en la mayoría de los casos, lo que provoca una diferencia considerable entre el número de

segmento en las direcciones de  $a_1$  y  $a_2$ . A medida que la relación  $N_1/N_2$  crece la varianza adimensional del error de geometrización se incrementa rápidamente, hasta alcanzar valores extremos (vea Figura 1)

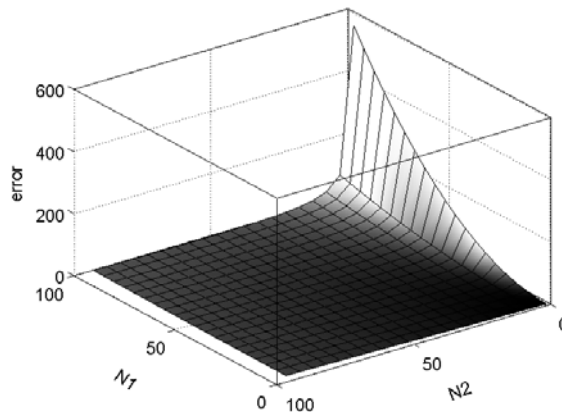


Figura 1: Error de geometrización calculado para  $N=1$  y diferentes valores de  $N_1$  y  $N_2$ , en el intervalo  $[1,100]$

Esta anisotropía, independientemente de su escala, tiene un reflejo diferente en el valor del error geométrico en función de su dirección relativa a los ejes principales de la rejilla formada por las unidades elementales que conforman el depósito. Para ilustrar este fenómeno comparemos las Figuras 2 y 3, donde se representa el mismo cuerpo mineralizado en la dirección de uno de los ejes del grid y con un ángulo de 45 grados. Aunque el número de unidades elementales con  $I(d)=1$  es la misma las varianzas resultantes son de 0.0089 y 0.0053 respectivamente, a causa de la diferencia de en el numero de segmentos. Este fenómeno disminuye rápidamente con el tamaño de la unidad elemental.

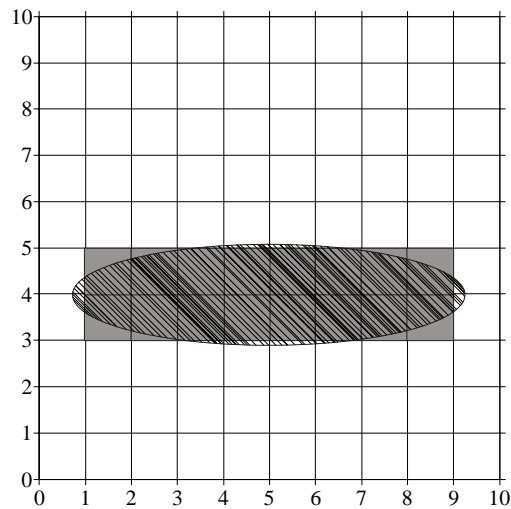


Figura 2: Objeto mineralizado con eje principal paralelo a la rejilla y error de geometrización adimensional de 0.0089, para  $N=16$

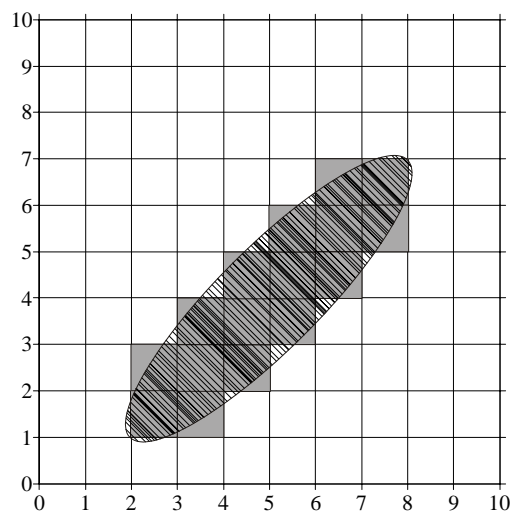


Figura 3: Objeto mineralizado con eje principal rotado 45 grados con respecto a la rejilla y error de geometrización adimensional de 0.0053, para  $N=16$

Como es de suponer el error geométrico es altamente sensible a la geometría del yacimiento, pero también puede estar influenciada por la selección de la orientación, tamaño y forma de la rejilla. Si se fija el valor de  $N$  en la ecuación [18] lo que realmente determina en el resultado son los valores de  $N_1$  y  $N_2$ , de esta manera las unidades elementales con  $I(d)=1$  y arregladas en patrones diferentes pueden tener el mismo error geométrico (vea la Figura 4). El error solo varia

cuando las unidades  $I(d)=1$  comparten en mayor o menor medida sus lados.

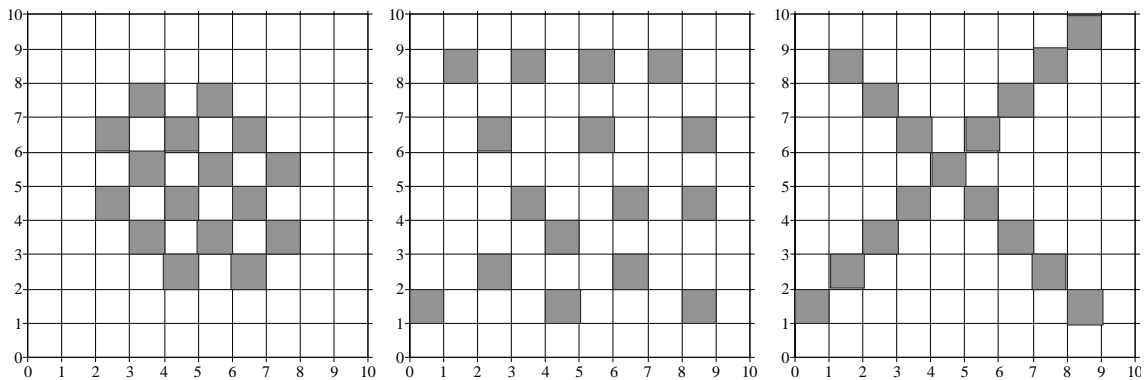


Figura 4: Tres arreglos espaciales de 16 unidades básicas de selectividad minera con error de geometrización adimensional de 0.0142.

El arreglo que garantiza el menor error geométrico es un cuadrado, como el que se muestra en la Figura 5. Esta misma configuración para yacimientos grandes, donde  $N$  es mucho mayor que 16, garantiza valores casi nulos, para el caso de un cuadrado de 100 x 100 unidades de selectividad minera es solamente 0.00000023 y la influencia de unos pocos huecos no cambia prácticamente el resultado. Si la forma del depósito es relativamente isotrópica y no existen o existen muy pocos huecos en el cuerpo mineral, entonces el error geométrico converge rápidamente a cero y puede ser obviado.

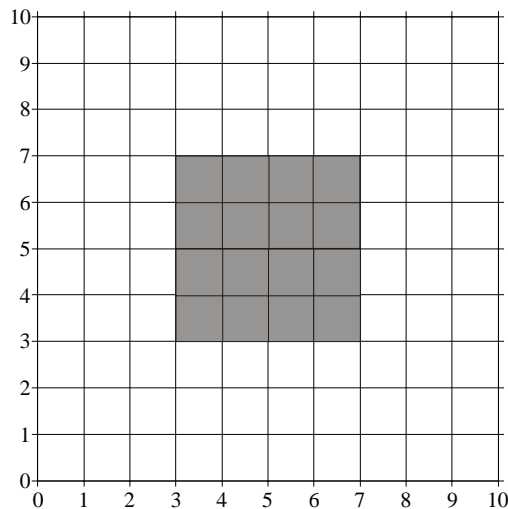


Figura 5: Arreglo espacial de 16 unidades básicas de selectividad minera con error de geometrización adimensional de 0.0036.

## CONCLUSIONES

Podemos decir que el error de geometrización, aunque solo depende de tres parámetros:  $N$ ,  $N_1$  y  $N_2$  debe ser aplicado cuidadosamente, considerando la anisotropía en la forma del cuerpo mineral y su orientación.

Solo vale la pena preocuparse por dicho error donde existe muy poca continuidad de las unidades de selectividad minera, o existe continuidad pero el yacimiento es pequeño.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHILÈS JEAN-PAUL, DELFINER PIERRE, 1999:** *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Jhon Wiley & Sons Inc., New York, p. 695.
- ARMTRONG MARGARET, 1998:** *Basic Linear Geostatistics*. Springer - Verlag, Berlin, p 153.

**ARMSTRONG MARGARET, GALLI ALAIN G., LE LOC'H GAËLLE, GEFFROY FRANÇOIS, ESCHARD RÉMI, 2003: *Plurigaussian Simulations in Geosciences*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg New York, p. 149.**