

Contribución al método de interpolación lineal con triangulación de Delaunay

Arístides Alejandro Legrá-Lobaina
Dulce María Atanes-Beatón
Carlos Guilarte-Fuentes

Resumen

La interpolación lineal con triangulación es un método idóneo para obtener el modelo digital del terreno cuando se conocen valores de algunas cotas topográficas en puntos de un área geográfica; sin embargo, solo pueden interpolarse puntos incluidos en la frontera convexa de la proyección de los puntos medidos y no se puede cuantificar mediante alguna fórmula el error de interpolación, por lo que no es posible evaluar la calidad de los resultados, lo que depende de cierta relación entre el muestreo topográfico y la variabilidad de la superficie. Se presenta un procedimiento para complementar la triangulación sobre la región rectangular mínima que contiene los puntos, así como un índice para cuantificar el error geométrico que se comete cuando se interpola el valor de la cota en un punto cualquiera perteneciente a dicha malla.

Palabras clave: Modelo digital del terreno; interpolación lineal; triangulación de Delaunay; error de interpolación.

Contribution to linear interpolation method with Delaunay triangulation

Abstract

The linear interpolation with triangulation is an ideal method to create a digital terrain model when knowing some survey data. However, only the points included in the convex frontier of the projection of the measured points can be interpolated. The interpolation error can not be quantified with any existing formula. Therefore, the results can not be evaluated, which depends on a certain relation between survey sampling and surface variability. This article presents a procedure to complement the triangulation in a minimum rectangular region containing the points in addition to an index to quantify the geometric error when the coordinate value is interpolated in any point from the grid.

Keywords: Digital terrain model; linear interpolation; Delaunay triangulation; interpolation error.

1. INTRODUCCIÓN

La modelación de una superficie consiste en construir una expresión o un algoritmo matemático capaz de generar una red de m puntos espaciales $(x_j; y_j; z_j)$ tales que faciliten su visualización gráfica o tabulada.

La Interpolación Lineal con Triangulación (ILT) constituye un método idóneo para la modelación de superficies (Fallas 2007) cuando se conocen los valores de las n cotas Z_i en los puntos de medición $P_i=(X_i; Y_i)$ del plano XY donde $i=1,2,\dots,n$ tal que $n>2$.

El método ILT se fundamenta en principios básicos de la Geometría Analítica del Plano y del Espacio, y su eficacia y eficiencia dependen principalmente de la cantidad y posición de los puntos de medición, en relación con la variabilidad de la superficie que se modela.

Para aplicar este método se hace necesario establecer una triangulación adecuada de los puntos P_i y es este el procedimiento de mayor complejidad porque, en general, para n puntos P_i del plano existe más de una triangulación y de todas ellas debe seleccionarse la que más contribuya a la eficacia del método. Chen y Xu (2004) han establecido los siguientes resultados teóricos:

- Una triangulación de Delaunay puede ser caracterizada como óptima si minimiza el error de interpolación (caracterizado por una norma L^p) para una función isotrópica dada entre todas las triangulaciones posibles de un conjunto dado de vértices, es decir: la distribución de los vértices se optimiza en el sentido de minimizar el error de interpolación.
- La triangulación de Delaunay óptima es difícil de obtener en la práctica debido a la complejidad que implica caracterizar el error de interpolación.
- Se introduce el concepto de triangulación casi-óptima y a partir del mismo se presentan dos condiciones suficientes para que una triangulación sea casi óptima.

De estos resultados teóricos resulta la necesidad de disponer de índices prácticos para evaluar el error de una interpolación puntual en toda una región plana. El presente trabajo tiene el objetivo de sistematizar la aplicación del método de interpolación lineal con triangulación de Delaunay en la modelación digital de terrenos, haciendo énfasis en la construcción de triangulaciones de mayor alcance geométrico y en la propuesta de un índice para evaluar el error geométrico de interpolación lineal puntual.

2. MODELO DIGITAL DEL TERRERNO

Un modelo digital del terreno (MDT) es el resultado de un proceso de búsqueda y aplicación de técnicas y procedimientos que permiten explicar las regularidades del comportamiento de una superficie topográfica. Usualmente el modelo que se obtiene se muestra como una tabla tipo malla de valores $(X; Y; Z)$ o mediante un gráfico en 2D (por ejemplo, de isolíneas) o en 3D (por ejemplo, de superficie). Esa modelación matemática consta de las siguientes etapas (Deutsh y Journal 1998; Legrá et al. 1999; Martínez et al. 2003 & Fallas 2007):

1. Diseño del muestreo de los puntos $P_i=(X_i; Y_i)$ que constituirán los datos para la modelación
2. Levantamiento topográfico de los valores Z_i
3. Obtención de una triangulación para los puntos P_i
4. Definición de los parámetros de la malla
5. Estimación de los valores de Z para los punto de la malla
6. Si fuera el caso, obtención de los gráficos solicitados.

El primer paso es el producto del consenso entre topógrafos, geólogos y mineros con alto nivel de competencia teórica y práctica sobre el tema y se basa en los principios de la racionalidad y representatividad de la muestra. El resultado es un diseño de muestreo que define cuántas mediciones topográficas serán realizadas y dónde.

El segundo paso es ejecutado por técnicos e ingenieros auxiliados por instrumentos de altísima precisión con avanzadas tecnologías computacionales y de comunicaciones. Se realizan mediciones topográficas desde el aire o en el terreno, las cuales son procesadas y almacenadas en formato $(P_i; Z_i)=(X_i; Y_i; Z_i)$ donde Z_i es la cota o altura en el punto P_i .

En el paso 3 se debe obtener una triangulación de los puntos P_i . El resultado es un conjunto de tríos de puntos donde cada uno de estos tríos define los tres vértices de un triángulo.

En el paso 4 se definen los parámetros de la malla, a saber: X_{\min} , Y_{\min} , X_{\max} , Y_{\max} , n_x (número de divisiones en el eje x) y n_y (número de divisiones en el eje y). El número de puntos de la malla se define como $m = n_x \times n_y$.

En el paso 5 se debe estimar el valor de Z_j para cada uno de los m puntos P_j de la malla. El método de estimación puede ser cualquiera de

los que aparece en la literatura y software afines a esta tarea (Deutsh y Journal 1998; Martínez et al. 2003 & Fallas 2007). En particular se acepta que para este fin un método apropiado es el de Interpolación Lineal con Triangulación.

3. TRIANGULACIÓN DE DELAUNAY

Dados un conjunto de n puntos $M = \{(x_j; y_j), j = 1, \dots, m, m > 2\}$ siempre se puede obtener su frontera convexa, que es un polígono P , tal que sus vértices son puntos de M y cualquier punto de M pertenece a la frontera o al interior de P (Figura 1).

Una triangulación T sobre M es la determinación de un conjunto de triángulos cuyos vértices pertenecen a M , la suma de sus áreas es igual al área determinada por el polígono P y, además, la intersección de cualquier pareja de triángulos es un lado común o un vértice común.

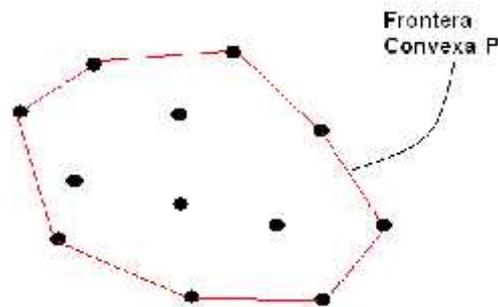


Figura 1. Frontera convexa de un conjunto de puntos M .

En particular, para un conjunto M de puntos no colineales donde:

- $m=3$ se puede obtener una sola triangulación (Figura 2a)
- $m=4$ se pueden dos triangulaciones diferentes (Figura 2b).

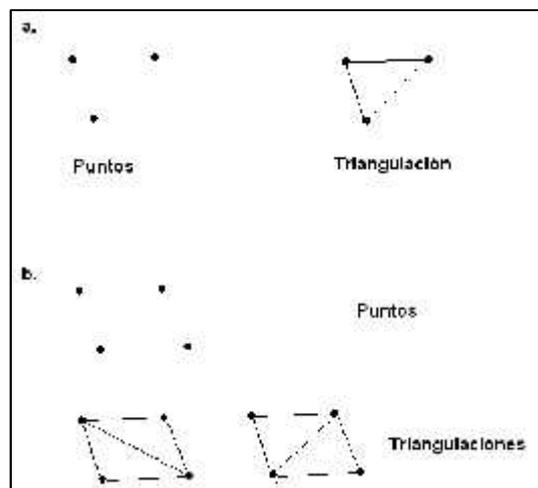


Figura 2. Triangulación a partir a de 3 puntos (a) y de 4 puntos (b).

Es importante destacar que a todo triángulo T se asocia su circunferencia circunscrita OT, cuyo centro es el punto de intercepción de las tres mediatrices del triángulo y los vértices del triángulo son puntos de la circunferencia (Figura 3).

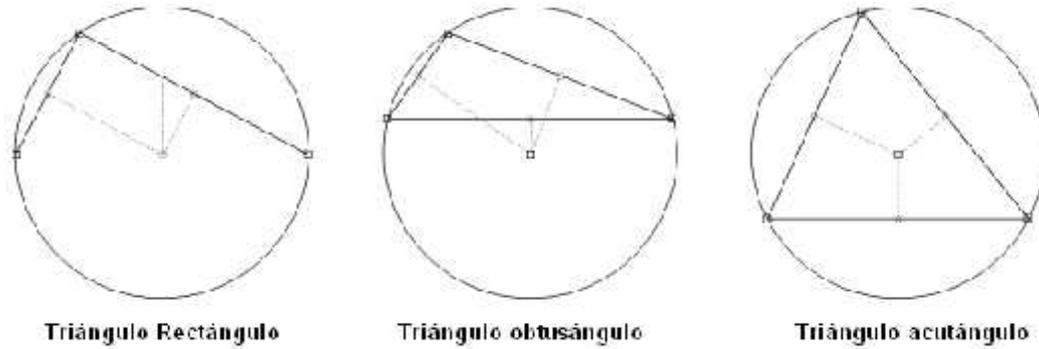


Figura 3. Circunferencias circunscritas de triángulos rectángulo, obtusángulo y acutángulo.

Para varias triangulaciones posibles del conjunto M, la triangulación de Delaunay (TDM) es aquella que cumple la condición siguiente: la circunferencia circunscrita OT de cualquier triángulo T de la triangulación TM no incluye ningún punto de M diferente a los vértices de T.

Esta condición maximiza la extensión del ángulo más pequeño de la red, lo que significa que en las triangulaciones de Delaunay, los ángulos tienden a ser próximos a 60° y, por tanto, los lados tienden a ser iguales, o sea, triángulos equiláteros (Figura 4)

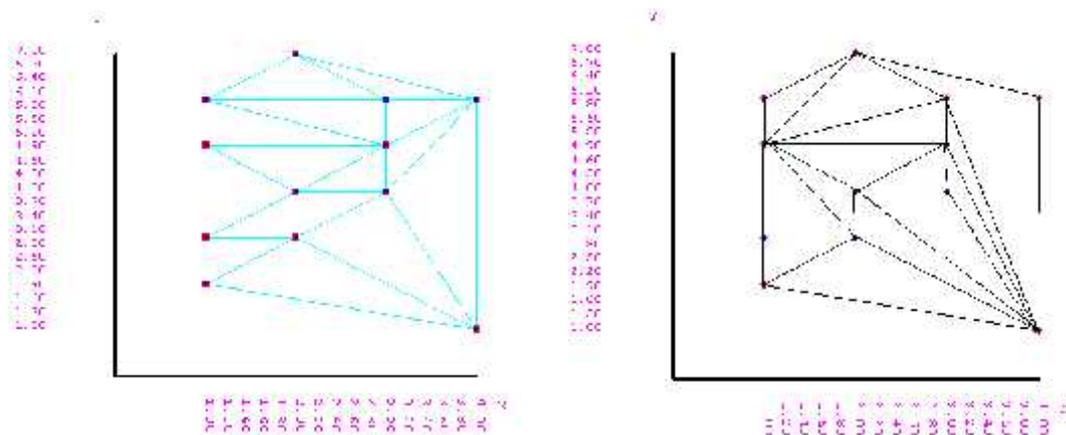


Figura 4. Triangulaciones. Delaunay (izquierda). No Delaunay (derecha).

Dado M existen varios procedimientos para obtener TDM (Lee y Schachter 1980 & Manzanilla 1993). En la presente investigación se ha utilizado el que propone Manzanilla (1993) e incluye los siguientes pasos:

1. Determinar entre los puntos de M el de menor valor de Y y entre ellos el punto de menor valor de X. Se denomina punto mínimo P_{\min} y tiene coordenadas $(X_{\min}; Y_{\min})$.
2. Obtener las distancias de todos los puntos de M al punto P_{\min} .
3. Ordenar los puntos de M según el criterio de distancia a P_{\min} (primero los puntos de menor distancia). Estos puntos ordenados se almacenan en el conjunto MO.
4. Construir el primer triángulo T_1 con los tres primeros puntos de MO. Determinar la circunferencia circunscrita OT_1 .
5. Incorporar T_1 a TDM.
6. Para $j=4$ hasta m hacer :
 - a) Si el punto $(x_j; y_j) \in MO$ cae dentro de la circunferencia circunscrita de algún triángulo de TDM ir a b; en caso contrario ir a c.

Un punto $D=(D_x; D_y)$ está dentro de la circunferencia circunscrita del triángulo de vértices $A=(A_x; A_y)$, $B=(B_x; B_y)$ y $C=(C_x; C_y)$ tomados en sentido contrario a las agujas del reloj si es mayor que cero el determinante (Bronshstein 2007):

$$\begin{vmatrix} A_x - D_x & A_y - D_y & (A_x - D_x)^2 + (A_y - D_y)^2 \\ B_x - D_x & B_y - D_y & (B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2 \\ C_x - D_x & C_y - D_y & (C_x - D_x)^2 + (C_y - D_y)^2 \end{vmatrix} \quad \text{Ecuación 1}$$

- b) Puesto que el punto $(x_j; y_j)$ está dentro de la circunferencia circunscrita de un triángulo de TDM, se procede a eliminar ese triángulo de la triangulación y se crean nuevos triángulos uniendo el nuevo punto con todos los puntos posibles que son vértices de los triángulos que aún permanecen en TDM (Figura 5).

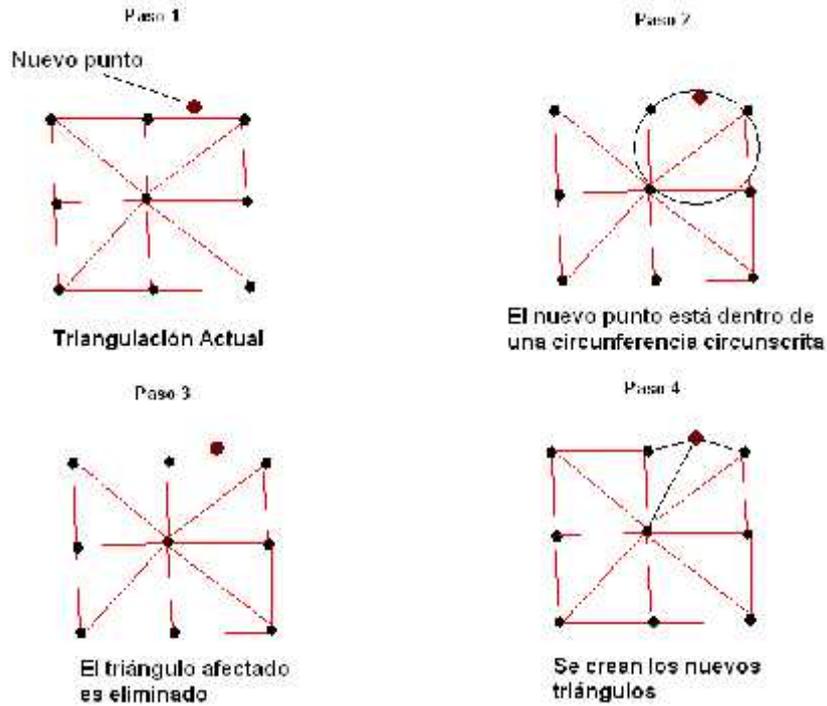


Figura 5. Creación de nuevos triángulos cuando el nuevo punto está dentro de la circunferencia circunscrita de un triángulo de TDM.

c) Se crean los nuevos triángulos posibles uniendo el nuevo punto con otros puntos siempre que los segmentos resultantes no intercepten alguno de los lados de los triángulos existentes (Figura 6).

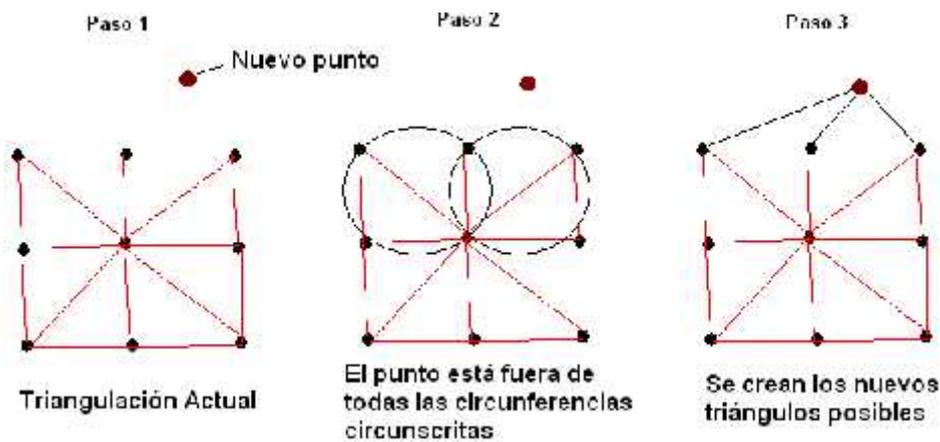


Figura 6. Creación de nuevos triángulos cuando el nuevo punto no está dentro ninguna circunferencia circunscrita de algún triángulo de TDM.

Puede notarse que las triangulaciones de Delaunay solo cubren el área delimitada por su frontera convexa, es decir, el polígono P. Sin embargo, es posible complementar esta triangulación con triángulos que cubran el rectángulo mínimo que contiene los puntos medidos; este rectángulo está delimitado por los puntos $P_1=P_{min}$; $P_2=(X_{max}; Y_{min})$; $P_3=P_{max}$;

y $P_4=(X_{\min}; Y_{\max})$, tal como se muestra en la Figura 7. Esto se logra uniendo cada punto P_1, P_2, P_3, P_4 con los puntos de P de manera que los segmentos resultantes no intercepten alguno de los lados de los triángulos existentes.

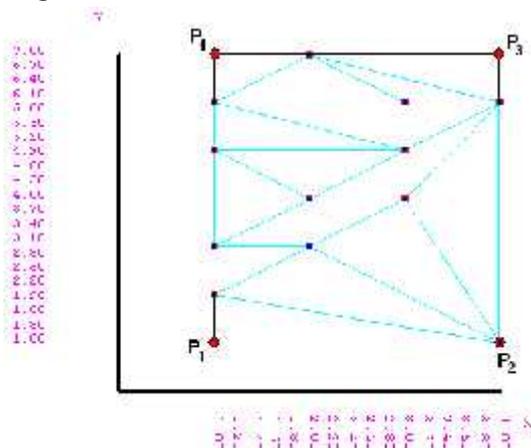


Figura 7. Triangulación de Delaunay y triangulación complementaria dentro de los límites de una malla rectangular.

3.1. Interpolación lineal con triangulación

El método de interpolación lineal con triangulación de Delaunay presupone que se tienen los puntos $M=\{(x_j; y_j; z_j), j=1, \dots, m\}$ y que sobre ellos se tiene una triangulación de Delaunay TDM. Para cada punto $E=(E_x; E_y)$ de una malla rectangular cuyos vértices son los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 , se quiere estimar el valor de Z , o sea: E_z . En este caso tienen los siguientes pasos:

1. Determinar a qué triángulo de TDM pertenece el punto $E=(x; y)$. Esto es cierto para el triángulo de vértices $A=(A_x; A_y)$, $B=(B_x; B_y)$ y $C=(C_x; C_y)$ si se cumple la siguiente relación entre las áreas de los triángulos implicados:

$$\frac{\text{Área}_{ABC}}{\text{Área}_{ABE} + \text{Área}_{AEC} + \text{Área}_{EBC}} = 1 \quad \text{Ecuación 2}$$

2. Hallar el plano $P x + Q y + R z = S$, que pasa por los puntos $A_e=(A_x; A_y; A_z)$, $B_e=(B_x; B_y; B_z)$ y $C_e=(C_x; C_y; C_z)$. Para ello se grupa convenientemente el resultado que se obtienen al desarrollar el determinante (Bronshstein 2007):

$$\begin{vmatrix} x - A_x & y - A_y & z - A_z \\ B_x - A_x & B_y - A_y & B_z - A_z \\ C_x - A_x & C_y - A_y & C_z - A_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Ecuación 3}$$

$$V = W \left| \frac{\lambda - \dots}{\dots_{\max}} \right| \tag{Ecuación 6}$$

Donde V está entre 0 ($\lambda = \dots$ o $W = 0$) y 1 ($\lambda = 0$, $\dots = \dots_{\max}$ y $W = 1$).

Si el triángulo es exterior a P entonces se calcula la distancia λ entre el punto a estimar y el vértice externo V_e del triángulo (Figura 9b). También se calculan las distancias D_{1e} (entre los vértices V_e y V_1) y D_{2e} (entre los vértices V_e y V_2); se propone el siguiente índice adimensional:

$$V = W \frac{\sqrt{|\lambda - D_{1e}| |\lambda - D_{2e}|}}{\dots_{\max}} \tag{Ecuación 7}$$

Que está entre 0 ($\lambda = D_{1e}$ o $\lambda = D_{2e}$ o $W = 0$) y 1 ($\lambda = 0$, $D_{1e} D_{2e} = \dots_{\max}^2$ y $W \rightarrow 1$).

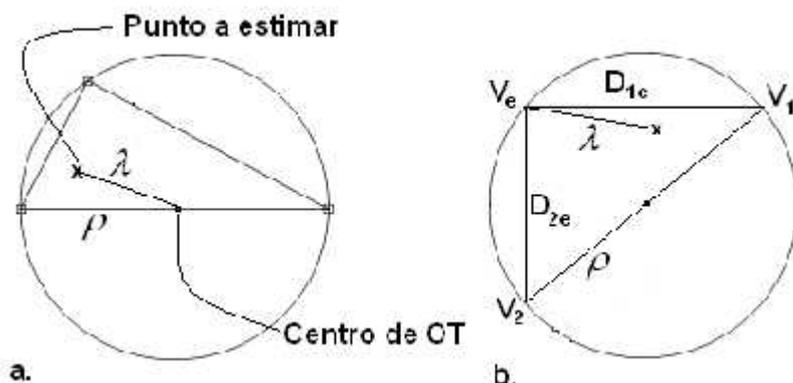


Figura 9. Radio ρ y distancia λ en triángulos interior (a) y exterior (b).

Es necesario precisar que en el presente trabajo, para la estimación de este error geométrico de interpolación λ , no se incluyen los factores relacionados con la exactitud de los datos medidos por los topógrafos que sin dudas también tienen una importante influencia en los resultados (Batista y Belete 2013).

4. CASO DE ESTUDIO

En un área del yacimiento laterítico ferroniquelífero Punta Gorda, de la empresa Comandante Ernesto Che Guevara, se han realizado mediciones de cota durante un levantamiento con fines de control de la minería. Los resultados del levantamiento (conjunto M de puntos) se muestran en la Tabla 1. Nótese que las coordenadas E y las coordenadas N están referenciadas respecto a un sistema de coordenadas local. Las cotas Z se refieren a la altura del terreno con respecto al nivel del mar.

Tabla 1. Datos del levantamiento topográfico

E (m)	N (m)	Z (m)	E (m)	N (m)	Z (m)
269,75	300	45	275,25	297,46	50
269,75	297,46	46	280,75	292,39	52
267	284,77	47	286,25	284,77	51
269,75	287,31	46	283,50	282,23	48
275,25	279,69	48	291,75	279,69	47
283,50	272,08	52	294,50	274,62	47
294,50	267	53	297,25	282,23	46
297,25	272,08	49	297,25	289,85	48
300	269,54	52	300	294,92	49
300	300	51	280,75	300	50

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aplicando el procedimiento descrito se obtuvo la triangulación de Delaunay (Figura 10) y los triángulos complementarios que completan el área de la malla rectangular.

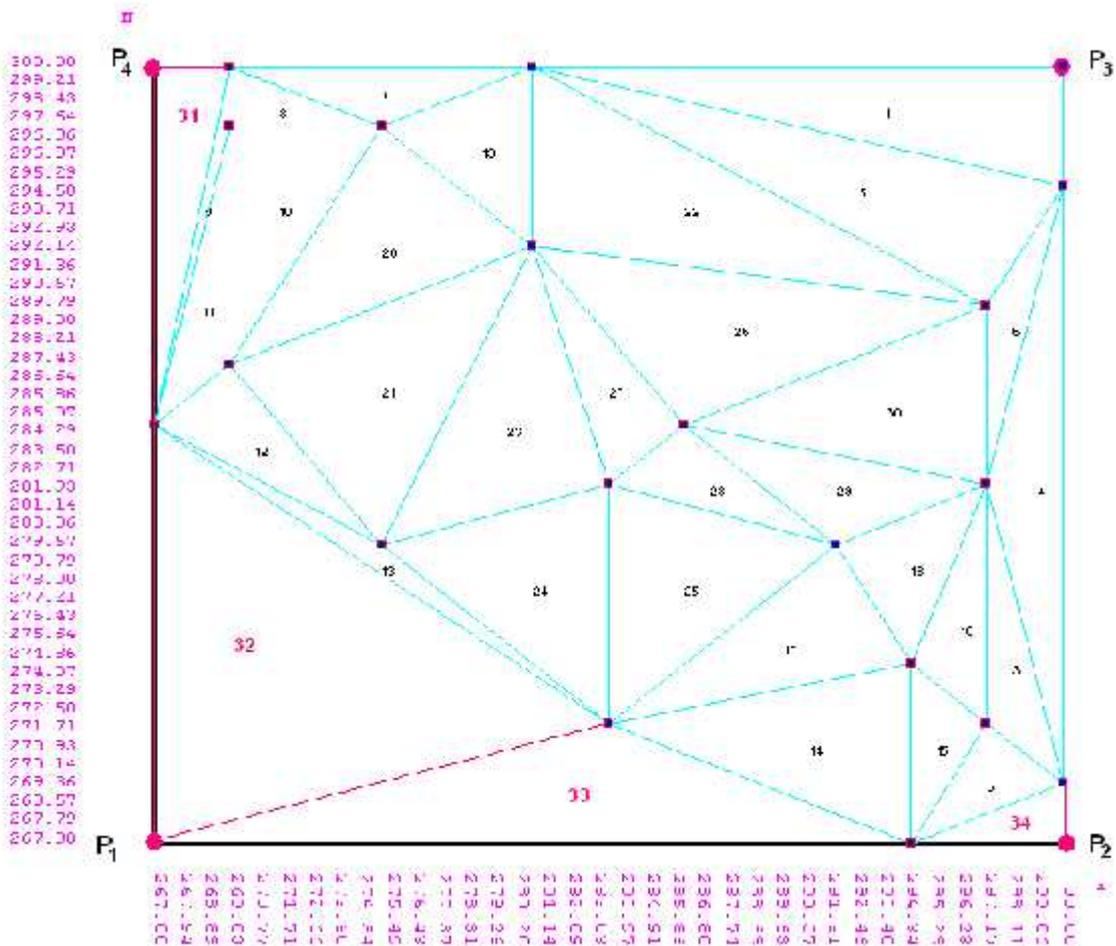


Figura 10. Triangulación de Delaunay y triangulación complementaria para el caso de estudio.

Tomando una malla que tiene $X_{\min}=267$ m; $X_{\max}=300$ m; $Y_{\min}=267$ m; $Y_{\max}=300$ m, $n_x=40$ y $n_y=40$, y aplicando el procedimiento de interpolación lineal, se obtiene una malla de 1 600 puntos que se pueden graficar, tal como se muestra en la Figura 11.

Para cada punto de la malla también se obtiene, aplicando las ecuaciones 6 y 7, un índice de error geométrico de interpolación. El comportamiento del índice se muestra en las isolíneas de la Figura 12.

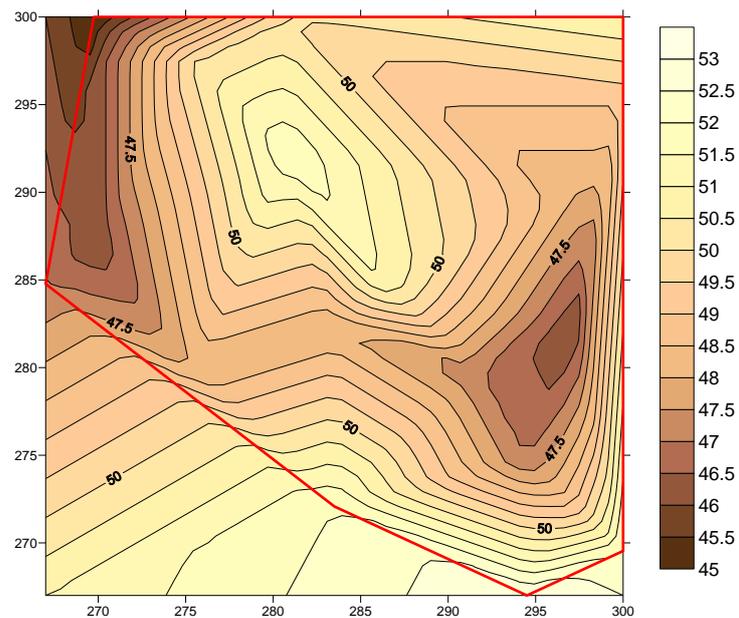


Figura 11. Isolíneas construidas a partir de las interpolaciones.

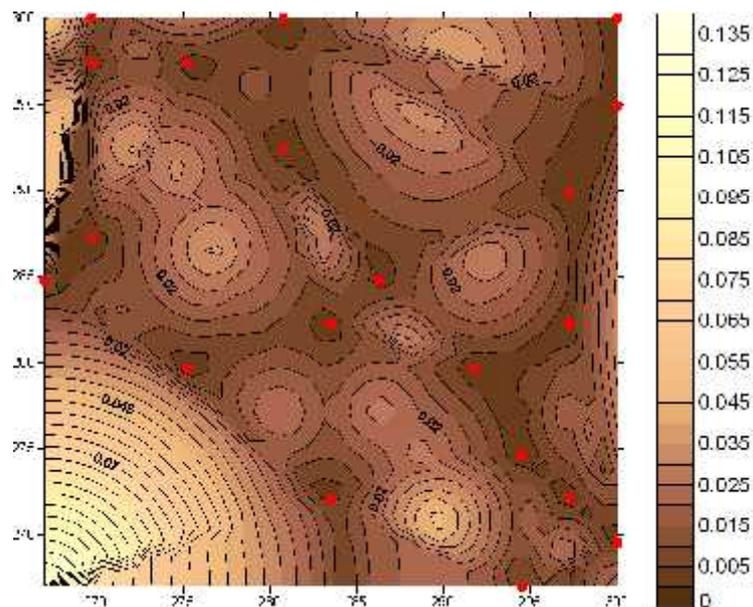


Figura 12. Isolíneas construidas a partir de los índices de error de las interpolaciones. Los puntos representan en 2D los datos de la Tabla 1.

Los resultados de interpolación obtenidos son semejantes a los que se obtienen usando las técnicas clásicas y con los procedimientos propuestos pueden ser estimadas adecuadamente las cotas Z en puntos externos, respecto a la frontera convexa de los puntos del levantamiento.

Los valores de los índices del error de interpolación muestran que en la zona exterior de la frontera convexa los errores son mayores que en el interior. Asimismo los errores disminuyen cuando el punto donde se estima está más cerca de cada uno de los puntos de medición (vértices de los triángulos) y cuando los planos son menos inclinados respecto al plano horizontal $Z=0$.

6. CONCLUSIONES

- Es adecuado y posible mejorar la triangulación correspondiente a un conjunto de puntos dados $(X_i; Y_i)$ si a su triangulación de Delaunay se le agregan los triángulos que completan el área de una malla rectangular mínima.
- Se ha propuesto un índice eficaz para evaluar el error geométrico de interpolación lineal con triangulación de Delaunay.

7. REFERENCIAS

- FALLAS, J. 2007: Modelos digitales de elevación: Teoría, métodos de interpolación y aplicaciones. Mapealo.Com, San José, Costa Rica, p. 83. [en línea]. Disponible en: http://www.mapealo.com/costarica/geodigital/documentos/alfabetizacion/mde_teoría_2007.pdf.
- CHEN, L. y XU, J. 2004: Optimal Delaunay Triangulations. *Journal Computations Mathematics* 22(2): 299-308.
- DEUTSH, V. C. & JOURNEL, G. A. 1998: Geostatistical Software Library and user's Guide. Oxford University, New York, p. 309.
- LEGRÁ, A.; SILVA, O. & BELETE, O. 1999: Modelación de una superficie topográfica a partir de la relación entre el Kriging y la interpolación lineal en R^n . *Minería y Geología* 16(1): 58-61.
- MARTÍNEZ-VARGAS, A.; LEGRÁ-LOBAINA, A. A.; FERRERA-ALBA, N. & MENA-MATOS, L. F. 2003: Modelo digital del relieve original del yacimiento Punta Gorda. *Minería y Geología* 19(3-4): 103-119.
- LEE, T. & SCHACHTER, B. 1980: Two Algorithms for Constructing Delaunay Triangulations. *International Journal of Computer Information Sciences* 9(3): 219-242.
- MANZANILLA, R. 1993: Generación automática de triangulaciones de Delaunay. En: I Seminario Venezolano de Métodos Numéricos en Ingeniería. Caracas, Venezuela, p. 77-91.
- BRONSHTAIN, I. N.; SEMENDYAYEV, K. A.; MUSIOL, G. & MÜHLIG, H. 2007: Handbook of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, p. 1 163.
- BATISTA-LEGRÁ, Y. & BELETE-FUENTES, O. 2013: Consideraciones sobre la exactitud de las redes de levantamiento topográfico. *Minería y Geología* 29(3): 56-64.

Aristides Alejandro Legrá Lobaina. alegra@ismm.edu.cu

Doctor en Ciencias Técnicas. Profesor Auxiliar.
Centro de Energía y Tecnología Avanzada de Moa.
Instituto Superior Minero Metalúrgico, Moa, Cuba.

Dulce María Atanes Beatón. atanes@fco.uo.edu.cu

Máster en Ciencias. Profesor Asistente.
Facultad de Civil. Departamento de Hidráulica.
Universidad de Oriente. Santiago de Cuba, Cuba

Carlos Guilarte Fuentes carlos@cug.co.cu

Máster en Ciencias. Profesor Asistente.
Departamento de Ciencias Básicas. Universidad de Guantánamo,
Guantánamo, Cuba.