Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

ARTÍCULO ORIGINAL

Modelación de variables eólicas mediante estimadores (A,U,Θ) multivariados

Modeling of wind variables through (A, U, θ) multivariate estimators

Arístides A. Legrá-Lobaina, Eduardo Terrero-Matos

Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, Holguín, Cuba.

Resumen

Se describieron tres metodologías para generalizar a los estimadores multivariados (A,U,Θ) teniendo en cuenta las relaciones entre dos o más variables dependientes. Estas generalizaciones dan respuestas a diversos problemas de modelación en las geociencias mediante el uso de la diversidad posible para el caso univariable, entre los que se destacan el Kriging, las Funciones de Base Radial, el Inverso de Potencias de la Distancia y los Interpoladores Polinómicos clásicos. El estimador simultáneo de variables dependientes que se define constituyó una sistémica y poderosa herramienta para la modelación múltiple. En este caso, también se describió la expresión para aproximar el error de estimación multivariado. El enfoque algebraico que se presenta en todos los casos facilita la programación de estas herramientas matemáticas que son aplicadas a la modelación de parámetros eólicos en dos casos de estudio.

Palabras clave: Estimador (A,U,Θ); estimador univariado; estimador multivariado; error de estimación; modelación eólica.

Abstract

This study describes three methodologies to generalize the multivariate estimators (A, U, Θ) taking into account the relationships between two or more dependent variables. These generalizations give answers to various modeling problems in geosciences by using the possible diversity for the univariate case between those that stand out the Kriging, the Radial Base Functions, the Inverse Powers of the Distance and the classic Polynomial Interpolators. The simultaneous estimator of dependent variables that is defined constitutes a systemic and powerful tool for multiple modeling. In this case, the expression is also described to approximate the multivariate estimation error. The algebraic approach that is presented in all cases permits programming these mathematical tools that are applied to the modeling wind parameters in two case studies.

Keywords: Estimator (A,U,Θ); univariate estimator; multivariate estimator; estimation error; wind modeling.

1. INTRODUCCIÓN

En las geociencias, frecuentemente se presenta la necesidad de obtener modelos en escenarios n-dimensionales (n>1) que permitan explicar el comportamiento de una variable U en un dominio fenomenológico complejo de la realidad objetiva y, en consecuencia, pronosticar su comportamiento bajo ciertas condiciones prefijadas. Ejemplos de estos modelos son los siguientes:

- Comportamiento espacial de la concentración de elementos químicos en un depósito de mineral
- Comportamiento espacio-temporal del nivel del manto freático en una región
- Comportamiento de la altura o cota topográfica en una región
- Comportamiento de la velocidad promedio del viento a 10 m de altura en una región bidimensional.

Una de las maneras más conocidas para obtener exitosamente estos modelos explicativos-pronosticadores es mediante estimadores puntuales, cuyo planteamiento se describe de la forma siguiente:

Sean los m datos:

$$W = \left\{ \left(P_i;\mathrm{U}_i\right) \mid P_i \in R^n ;\ U_i \in R \right\} \quad (1)$$

El propósito de los estimadores puntuales es obtener una aproximación del valor de U en un punto $P_e \in R^n$, o sea: hallar $U_e \approx U_R = F(P_e)$.

En el presente trabajo se hace referencia a los estimadores puntuales denominados (A,U,Θ) que tienen dos formas equivalentes de expresarse (Legrá-Lobaina 2017). Sin perder generalidad en lo que sigue se explicará la forma UΘ.

Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

Sean las matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \cdots & \Theta_{1\mathrm{m}} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \cdots & \Theta_{2\mathrm{m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{\mathrm{m}1} & \Theta_{\mathrm{m}2} & \cdots & \Theta_{\mathrm{mm}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Asumiendo que esta matriz [A] y su transpuesta [A_T] tienen inversas.

$$[U_W] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[\Theta_e] = \begin{bmatrix} \Theta_{e1} \\ \Theta_{e2} \\ \cdots \\ \Theta_{\mathrm{em}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Donde la función real Θ, que describe algún tipo de comportamiento de U, puede operar sobre dos puntos en la forma $\Theta_{ij}=\xi(P_i;P_j)$ o puede operar sobre un punto y una función en la forma $\Theta_{ij}=\psi_i(P_j)$.

Una aclaración necesaria es que en lo que sigue el producto escalar (denotado •) de dos vectores filas, de dos vectores columnas e incluso de un vector fila por un vector columna o viceversa, se calcula como la suma de todos los resultados que se obtienen al multiplicar dos a dos los elementos de igual índice de cada vector. El producto entre matrices o entre matrices y vectores se realiza de la forma usual.

Del estimador (A,U,Θ) debe establecerse un elemento más denominado Deriva. Esta puede escribirse como el producto escalar usual del vector $[b]^T=[b_1, ..., b_t]$, y un vector de t funciones conocidas: $[\theta(P)]^T=[\theta_1(P), ..., \theta_t(P)]$.

$$\varepsilon(P) = [b] \cdot [\theta(P)] = \sum_{k=1}^{t} b_k \theta_k(P) \quad (5)$$

La estimación se obtiene mediante la expresión:

$$U_e = \sum_{i=1}^{m} L_i \Theta_{\mathrm{ei}} + \sum_{k=1}^{t} b_k \theta_k(P_e) \quad (6)$$

Asumiendo el vector $[L]^T=[L_1, ..., L_m]$ entonces (6) se escribe en notación vectorial:

$$U_e = [L] \cdot [\Theta_e] + [b] \cdot [\theta_e] \quad (7)$$

Asumiendo que $[L]\bullet[\theta(P_1),\theta(P_2),...,\theta(P_m)]=0$ se completa el sistema de ecuaciones lineales (8), el cual debe resolverse para obtener los valores de los coeficientes L_i y b_k.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} L_i \Theta_{\text{ij}} + \sum_{k=1}^{t} b_k \theta_k(P_j) = U_j \\ \sum_{i=1}^{m} L_i\, \theta_h(P_i) = 0 \\ j = 1,2,\ldots,m \\ h = 1,2,\ldots,t \end{cases} \qquad (8)$$

Donde:

$$[\theta_{\text{tm}}] = \begin{bmatrix} \theta_1(P_1) & \theta_1(P_2) & \ldots & \theta_1(P_m) \\ \theta_2(P_1) & \theta_2(P_2) & \ldots & \theta_2(P_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_t(P_1) & \theta_t(P_2) & \ldots & \theta_t(P_m) \end{bmatrix} \qquad (9)$$

La expresión (8) se escribe matricialmente:

$$\begin{bmatrix} A & \theta_{\text{mt}} \\ \theta_{\text{tm}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_W \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Para determinar el error de cada estimación puntal (P_e;U_e) se puede utilizar la expresión que propone Legrá-Lobaina (2018):

$$L_e = \frac{\sigma_{d_{\text{ij}}}}{\sqrt{m_d}} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i||U_i - U_e| \qquad (11)$$

En el trabajo citado se explica cómo calcular $[\lambda]$ y $\frac{\sigma_{d_{\text{ij}}}}{\sqrt{m_d}}$.

En las geociencias también se plantea frecuentemente la necesidad de trabajar con modelos multivariados, tal como lo explican algunos investigadores (Chilés y Delfiner 1999; Díaz-Viera 2002; Rivoirard 2003; Giraldo 2005). Ejemplos de estos casos para las ciencias eólicas son los siguientes:

- Comportamiento interrelacionado de la cota topográfica y de la velocidad promedio del viento a 10 m de altura en una región
- Comportamiento de los parámetros K y C de una Distribución de Weibull que modela estadísticamente la velocidad del viento.

El objetivo del presente trabajo es explicar e ilustrar, mediante dos casos de estudio de las geociencias, tres metodologías fundamentales de los estimadores (A,U,Θ) cuando se trata de considerar dos o más variables dependientes y dos o más variables independientes.

2. METODOLOGÍA BASADA EN EL USO DE DERIVA PARA MODELAR V CONSIDERANDO EL COMPORTAMIENTO DE Z

Sea una región bidimensional donde se tienen las variables espaciales independientes X e Y que denotan las coordenadas de cada punto, se tienen las coordenadas de m=36 puntos $P_i=(x_i;y_i)$ (i=1,...,36).

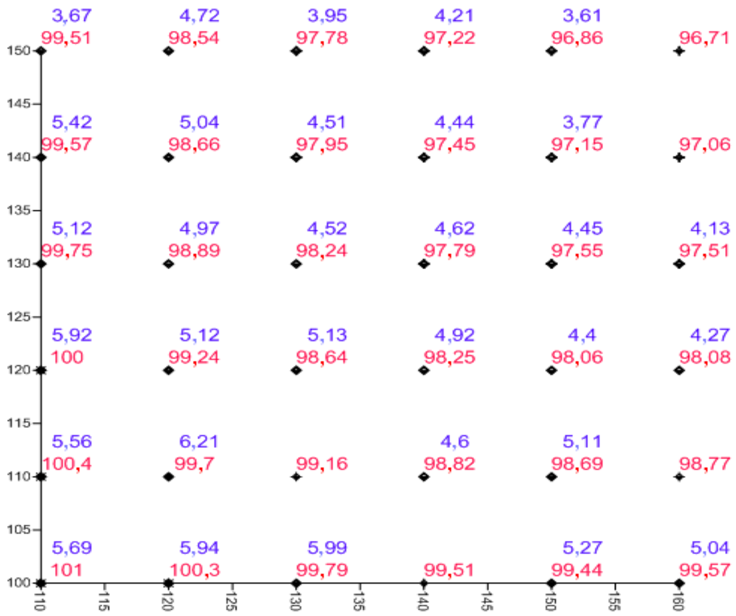

Figura 1. Datos de las variables V (velocidad media del viento, superior en azul) y Z (altura topográfica, inferior en rojo).

Según la Figura 1, en 31 de los puntos se conoce la velocidad media del viento, denotada V, y en los 36 puntos se conoce la altura topográfica con respecto al nivel del mar, que se denota Z. Se denominará al escenario *caso de estudio 1* y, en este caso, al conjunto de datos se le denota: $W_{VZ} = \{ (P_i;V_i;Z_i) \mid P_i \in R^n;\ U_i \in \mathrm{R};\ Z_i \in R \}$.

Hipotéticamente, se pueden hacer las consideraciones siguientes:

- V es una variable que depende espacialmente de P y su medición es compleja y costosa. Esta aseveración implica que V es una variable candidata a ser estimada en cualquier punto P_e.

- Z es una variable que también depende espacialmente de P y su medición es sencilla y económica por lo que esta variable puede conocerse por mediciones en el punto P_e. No se puede descartar que el valor $Z_e(P_e)$ puede ser estimado mediante un modelo externo al proceso de estimación de V.

- Entre V y Z existe cierta interdependencia compleja que puede reducirse a que: "*la altura Z influye en el valor de la velocidad V*". El modelo formal de esta interdependencia es desconocido.

Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

En este caso, se tiene la posibilidad de adaptar el modelo descrito en la Introducción del artículo tomando las definiciones siguientes:

- m=31, ya que se omiten los puntos de W donde faltan datos.
- t=2; $\theta_1(P) = 1$; $\theta_2(P) = Z(P)$. De esta manera se obtiene: $\varepsilon(P) = b_1 + b_2 Z(P)$.
- Modelo UPD con potencia p=1,45; donde se asume la distancia euclidiana y factor de suavización nulo (Legrá-Lobaina 2018).

Para lograr cierta autenticidad para el caso de estudio 1 que se analiza, en el presente trabajo se ha establecido que:

$$Z(P) = \begin{cases} Z_i & \text{para } P=P_i (i=1,\ldots,m) \\ 127{,}466496599197- \\ \quad 0{,}248784013613567\ X_e - \\ \quad 0{,}111333401360761\ Y_e - \\ \quad 0{,}00055934693876603\ X_e\ Y_e + \\ \quad 0{,}00102500000002561\ X_e^2 + \\ \quad 0{,}00057499999999573\ Y_e^2 + \\ \quad 2\ DE\ R_P & \text{para otro valor de } P \end{cases}$$

Donde DE es la desviación estándar de los datos Z_i y R_P es para cada P un número aleatorio en el intervalo [-1;1]; entonces véase que el valor del producto 2 DE R_P siempre estará entre el intervalo [-2 DE;2 DE].

El lector puede notar que la función Z(P) pudiera tomarse de otras maneras. Por ejemplo: también multiplicar Z_i por 2 DE R_P o solo multiplicar Z_i por 2 DE R_P o no multiplicar por este factor.

Para comparar a continuación se muestran gráficamente los modelos UPD para $\varepsilon(P) = b_1$ (Figura 2) y $\varepsilon(P) = b_1 + b_2 Z(P)$ (Figura 3), donde para cada malla se han definido dimensiones 40×40 puntos en los límites geométricos de los puntos P_i y para cada estimación puntual del segundo modelo; el valor de 2 DE R_P es aleatorio.

Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

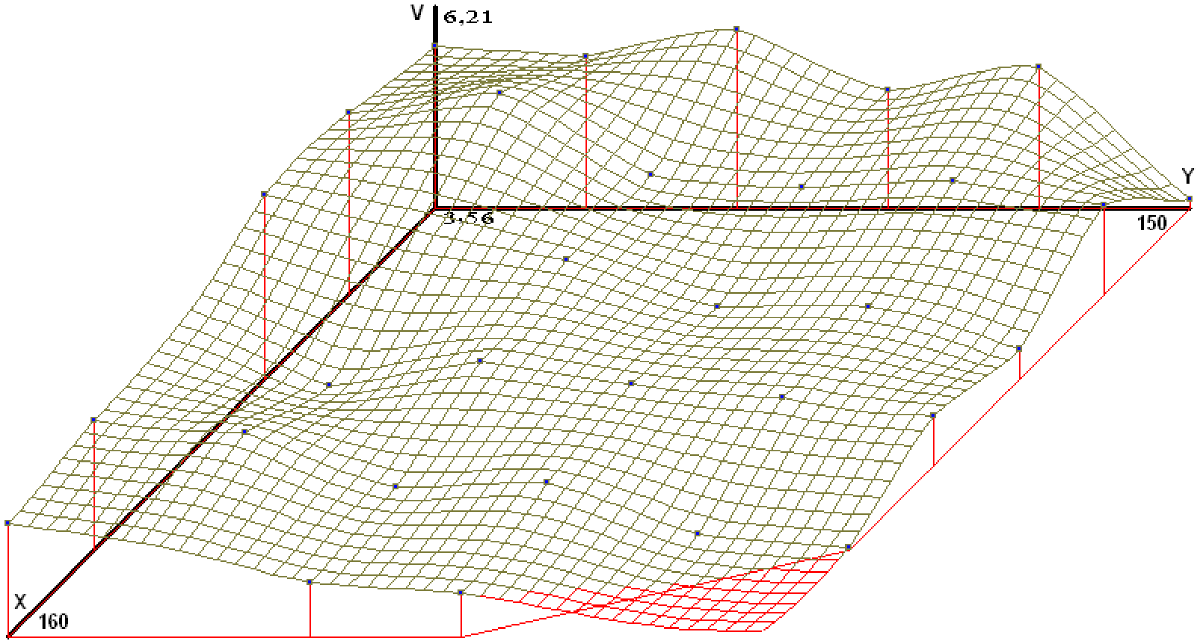

Figura 2. Modelo univariado UPD de V sin considerar a Z.

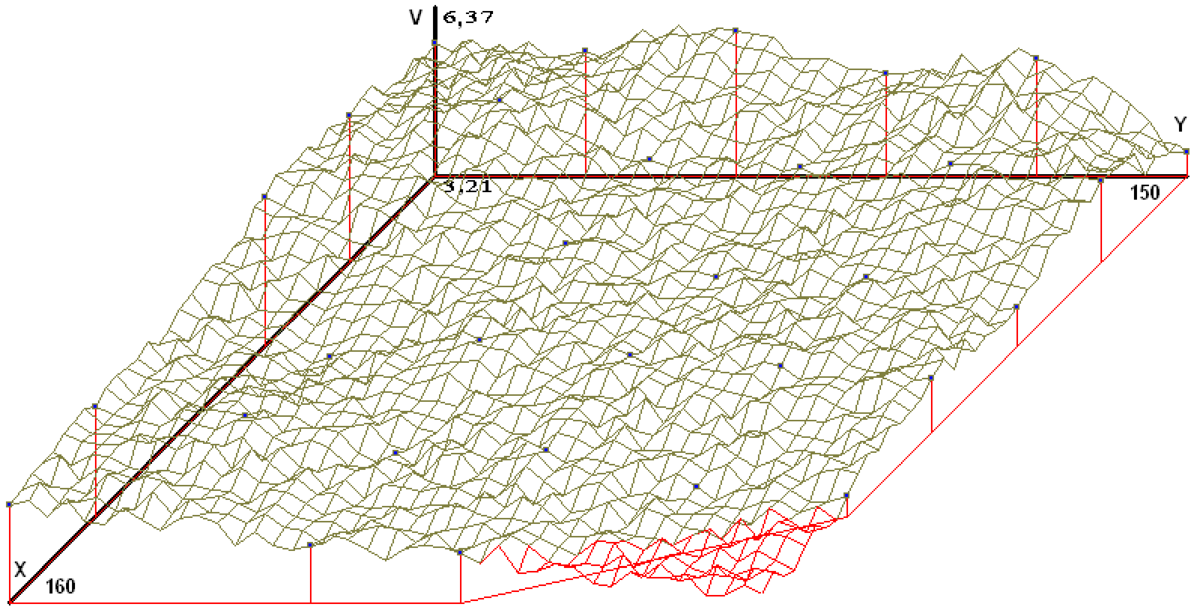

Figura 3. Modelo multivariado UPD de la variable V considerando la deriva con respecto a Z: $\varepsilon(P) = b_1 + b_2 Z(P)$

El comentario obvio es que el segundo modelo refleja de manera clara la influencia de Z sobre V. Este enfoque es conveniente en la medida en que los valores de Z(P) tengan alta exactitud.

Por otra parte, si en cada oportunidad en que se obtenga un modelo multivariado se toman valores aleatorios de R_P, eventualmente diferentes, entonces cada modelo multivariado constituye una simulación del modelo univariado

Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

3. METODOLOGÍA BASADA EN LA INTERDEPENDENCIA PARA MODELAR V CONSIDERANDO EL COMPORTAMIENTO DE Z

En esta oportunidad los datos del caso de estudio 1 se asumen como dos conjuntos donde sus cardinales y coordenadas pueden ser diferentes:

$W_V = \{ (P_{\mathrm{Vi}};\mathrm{V}_i) \mid P_{\mathrm{Vi}} \in R^n ; V_i \in R \}$ para un total de m_V datos

$W_Z = \left\{ \left(P_{\mathrm{Zj}};\mathrm{Z}_j\right) \mid P_{\mathrm{Zj}} \in R^n ; Z_j \in R \right\}$ para un total de m_Z datos.

También se suponen conocidas las funciones:

- Θ_V que describe el comportamiento de V
- Θ_Z que describe el comportamiento de Z
- Θ_{VZ} que define el comportamiento conjunto de V y de Z.

Se verá primero el caso de la Estimación de V usando las funciones Θ_U, Θ_Z y Θ_{VZ} y asumiendo particularmente que no hay deriva. Se propone:

$$V_e = \sum_{i=1}^{m_V} L_i \Theta_{\mathrm{Vei}} + \sum_{j=1}^{m_Z} F_j \Theta_{\mathrm{VZej}} \tag{12}$$

En esta ocasión solo se hará referencia al caso en que $\Theta_{ij}=\xi(P_i;P_j)$ y además debe notarse que:

- $\Theta_{Zij}=\xi_Z(P_{Zi};P_{Zj})$
- $\Theta_{Vij}=\xi_V(P_{Vi};P_{Vj})$
- $\Theta_{VZij}=\xi_{VZ}(P_{Vi};P_{Zj})$

En la última expresión se tiene que, en general: $\Theta_{VZij} \neq \Theta_{VZji}$.

Asumiendo que: $[L]^T=[L_1, ..., L_{mz}]$ y $[F]^T=[F_1, ..., F_{mv}]$

Siguiendo las ideas de Legrá-Lobaina (2017), para obtener los vectores [L] y [F] debe resolverse el sistema:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\mathrm{V}\ \mathrm{m}_V m_V} & \Theta_{\mathrm{V}\ \mathrm{Zm}_V m_Z} \\ \Theta_{\mathrm{V}\ \mathrm{Zm}_Z m_V} & \Theta_{\mathrm{Z}\ \mathrm{m}_Z m_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Z \end{bmatrix} \tag{13}$$

Donde se ha considerado además que:

$$\Theta_{\mathrm{Vm}_V m_V} = \begin{pmatrix} \Theta_{V11} & \dots & \Theta_{V1m_V} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{m_V 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{Vm}_V m_V} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\Theta_{\mathrm{Zm}_Z m_Z} = \begin{pmatrix} \Theta_{Z11} & \dots & \Theta_{Z1m_Z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{\mathrm{Vm}_Z 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{Zm}_Z m_Z} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\Theta_{\mathrm{VZm}_Z m_V} = \begin{pmatrix} \Theta_{\mathrm{VZ}11} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZ}1m_V} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{\mathrm{VZm}_Z 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZm}_Z m_V} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\Theta_{\mathrm{VZm}_V m_Z} = \begin{pmatrix} \Theta_{\mathrm{VZ}11} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZ}1m_Z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{\mathrm{VZm}_V 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZm}_V m_Z} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Las ecuaciones de las secciones $\Theta_{\mathrm{VZm}_Z m_V}$y $\Theta_{\mathrm{Zm}_Z m_Z}$ se construyen a partir de asumir y combinar las condiciones:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\mathrm{VZ}11} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZ}1m_V} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{\mathrm{VZm}_Z 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{VZm}_Z m_V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ \dots \\ L_{m_Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{Z11} & \dots & \Theta_{Z1m_Z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{\mathrm{Vm}_Z 1} & \dots & \Theta_{\mathrm{Zm}_Z m_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_{m_V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \dots \\ Z_{m_Z} \end{bmatrix} \tag{19}$$

En el caso en que no existe o se desconoce Θ_{VZij}, el estimador (12) se puede escribir como:

$$V_e = \sum_{i=1}^{m_V} L_i \Theta_{\mathrm{Vei}} + \sum_{j=1}^{m_Z} F_j \Theta_{\mathrm{Zej}} \tag{20}$$

Y el sistema (13) se escribe:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\mathrm{V}\ \mathrm{m}_V m_V} & \Theta_{\mathrm{Z}\ \mathrm{m}_V m_Z} \\ \Theta_{\mathrm{Z}\ \mathrm{m}_Z m_V} & \Theta_{\mathrm{Z}\ \mathrm{m}_Z m_Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Z \end{bmatrix} \tag{21}$$

Si existe deriva $\theta_V(P) = \sum_{k=1}^{t_V} b_{\mathrm{Vk}} \theta_{\mathrm{Vk}}(P)$ para V y no existe para Z, el estimador (12) se rescribe:

$$V_e = \sum_{i=1}^{m_V} L_i \Theta_{\mathrm{Vei}} + \sum_{j=1}^{m_Z} F_j \Theta_{\mathrm{VZej}} + \sum_{k=1}^{t_V} b_{\mathrm{Vk}} \theta_{\mathrm{Vk}}(P_{\mathrm{Ve}}) \tag{22}$$

Donde: $[b_V]^T = [b_{\mathrm{V}1}, b_{\mathrm{V}2}, \dots, b_{\mathrm{Vt}_V}]$ y $[\theta_V]^T = [\theta_V(P_{\mathrm{V}1}), \theta_V(P_{\mathrm{V}2}), \dots, \theta_V(P_{\mathrm{Vm}_V})]$.

Asumiendo que: $[L] \bullet [\theta_V] = 0$ entonces se obtiene que:

$$\begin{cases} L_1 \theta_{\mathrm{V}1}(P_{\mathrm{V}1}) + L_2 \theta_{\mathrm{V}1}(P_{\mathrm{V}2}) + \dots + L_{m_V} \theta_{\mathrm{V}1}(P_{\mathrm{Vm}_V}) = 0 \\ L_1 \theta_{\mathrm{V}2}(P_{\mathrm{V}1}) + L_2 \theta_{\mathrm{V}2}(P_{\mathrm{V}2}) + \dots + L_{m_V} \theta_{\mathrm{V}2}(P_{\mathrm{Vm}_V}) = 0 \\ \dots \\ L_1 \theta_{\mathrm{Vt}_V}(P_{\mathrm{V}1}) + L_2 \theta_{\mathrm{Vt}_V}(P_{\mathrm{V}2}) + \dots + L_{m_V} \theta_{\mathrm{Vt}_V}(P_{\mathrm{Vm}_V}) = 0 \end{cases}$$

Y el sistema (13) queda finalmente:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\text{V m}_V m_V} & \Theta_{\text{V Zm}_V m_Z} & \theta_{\text{V m}_V t} \\ \Theta_{\text{V Zm}_Z m_V} & \Theta_{\text{Z m}_Z m_Z} & 0 \\ \theta_{\text{V tm}_V} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ F \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

De manera semejante las expresiones (20) y (21) pueden generalizarse cuando se considera la deriva de V:

$$V_e = \sum_{i=1}^{m_V} L_i \Theta_{\text{Vei}} + \sum_{j=1}^{m_Z} F_j \Theta_{\text{Zej}} + \sum_{k=1}^{t_V} b_{\text{Vk}} \theta_{\text{Vk}}(P_{\text{Ve}}) \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\text{V m}_V m_V} & \Theta_{\text{Z m}_V m_Z} & \theta_{\text{V m}_V t} \\ \Theta_{\text{ Z m}_Z m_V} & \Theta_{\text{Z m}_Z m_Z} & 0 \\ \theta_{\text{V tm}_V} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ F \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Finalmente puede analizarse el caso en que también existe deriva independiente para Z denominada $\theta_Z(P) = \sum_{k=1}^{t_Z} b_{\text{Zk}} \theta_{\text{Zk}}(P)$. La nueva generalización será ilustrada en este texto para las expresiones (22) y (23) pero de manera semejante pueden rescribirse (24) y (25). El estimador queda:

$$V_e = \sum_{i=1}^{m_V} L_i \Theta_{\text{Vei}} + \sum_{j=1}^{m_Z} F_j \Theta_{\text{VZej}} + \sum_{k=1}^{t_V} b_{\text{Vk}} \theta_{\text{Vk}}(P_{\text{Ve}}) + \sum_{k=1}^{t_Z} b_{\text{Zk}} \theta_{\text{Zk}}(P_{\text{Ze}}) \tag{26}$$

Donde: $[b_Z]^T = [b_{Z1}, b_{Z2}, \ldots, b_{Xt_Z}]$ y $[\theta_Z]^T = [\theta_Z(P_{Z1}), \theta_Z(P_{Z2}), \ldots, \theta_Z(P_{Zm_Z})]$.

Asumiendo, además, que [F]•$[\theta_Z]$=0 y que para todo punto P_{Vi}, i=1,…,m_V se cumple que $\theta_Z(P_{V_i}) = 0$. Entonces se obtiene el sistema (27) que permite obtener los valores de [L], [F], [b_V] y [b_Z].

$$\begin{bmatrix} \Theta_{\text{V m}_V m_V} & \Theta_{\text{Z m}_V m_Z} & \theta_{\text{V m}_V t_V} & 0 \\ \Theta_{\text{Z m}_Z m_V} & \Theta_{\text{Z m}_Z m_Z} & 0 & \theta_{\text{Z m}_Z t_Z} \\ \theta_{\text{V t}_V m_V} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{\text{Z t}_Z m_Z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ F \\ b_V \\ b_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ Z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Estos modelos pueden generalizarse aún más de otras maneras (Chilés y Delfiner 1999; Díaz-Viera 2002; Rivoirard 2003; Giraldo 2005):

- Aumentando el número de variables dependientes auxiliares.
- Considerando otras formas o influencias de la deriva.
- Estimando simultáneamente diversas variables dependientes. Esta generalización se describe en el próximo epígrafe.

A continuación se muestra el modelo de malla obtenido al aplicar este enfoque a los datos del caso de estudio 1, asumiendo que:

- m_V = 31 y m_Z = 36.

- El modelo descrito por las expresiones (22) y (23).
- Las funciones Θ_{Zij}, Θ_{Vij} y Θ_{VZij} se tomarán como Funciones de Base Radial del tipo Spline Cúbico Natural: $\Theta(d;R)=(d^2+R^2)^{3/2}$. Para los puntos de W_V se usa Θ_V y R_V=6,45; para de W_Z se usa Θ_Z y R_{VZ}=5,56; y para los de W_V y W_Z se usa Θ_{VZ} y R_{VZ}=5,97. La distancia d es la euclidiana con factor de suavización nulo.
- Deriva $\varepsilon(P_V)=b_1+b_2X_V+b_3Y_V$ y no hay deriva respecto a Z.

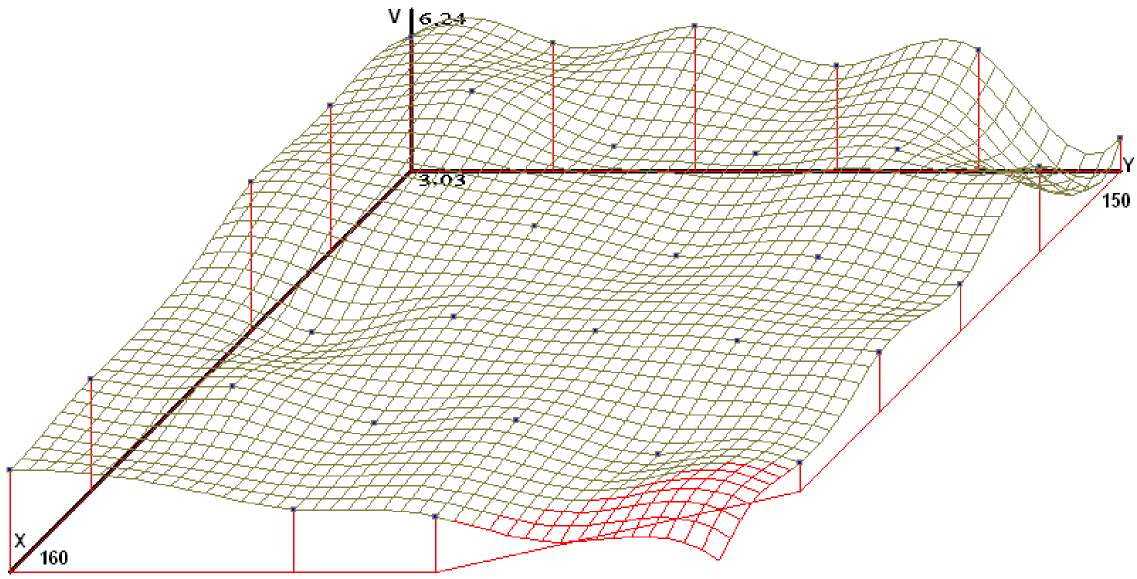

Figura 4. Modelo multivariado FBR de la variable V, considerando que existe dependencia entre V y Z y se tiene la presencia de una deriva: $\varepsilon(P_V)=b_1+b_2X_V+b_3Y_V$.

4. METODOLOGÍA BASADA EN LA ESTIMACIÓN SIMULTÁNEA DE DOS VARIABLES DEPENDIENTES

La forma dual ΘU de estas variantes son muy conocidas (Myers 1992; Rusu y Rusu 2006) y usadas en la Geoestadística bajo la denominación de Co-Kriging (Chilés y Delfiner 1999; Díaz-Viera 2002; Rivoirard 2003; Giraldo 2005; Marcotte 2018) donde las funciones Θ_Z, Θ_V son los correspondientes variogramas (o covarianzas) y Θ_{VZ} es el variograma cruzado (o covarianza cruzada) entre V y Z; debe señalarse que en este enfoque tienen especial importancia los conceptos de insesgamiento, la varianza de estimación y la optimización (minimización) de esta.

Todos los trabajos citados describen alguna forma matricial de estos estimadores ΘU. Siguiendo ese enfoque a continuación se describe la forma matricial general de los estimadores UΘ para el caso de que:

Minería y Geología / v.35 n.1 / enero-marzo / 2019 / p. 84-99 ISSN 1993 8012

- Los valores de todas las variables dependientes se conocen en m coordenadas P_i.
- Se presenta una función Θ como una matriz cuadrada del orden de la cantidad de funciones dependientes a modelar.
- Se presenta una deriva generalizada de t componentes expresada matricialmente.

El estimador (7) ahora se escribe como:

$$[\overline{U}_e] = [\overline{\Theta}_e][\overline{L}] + [\overline{\theta}_e][\overline{b}] = \begin{bmatrix}[\overline{\Theta}_e] & [\overline{\theta}_e]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\overline{L}]\\ [\overline{b}]\end{bmatrix} \tag{28}$$

Donde, sin perder generalidad, los vectores que aparecen en esa expresión para dos variables independientes V y Z se escriben:

$$[\overline{U_W}] = \begin{bmatrix}[\overline{U_1}]\\ [\overline{U_2}]\\ \cdots\\ [\overline{U_m}]\end{bmatrix},\ [\overline{U_i}] = \begin{bmatrix}V_i\\ Z_i\end{bmatrix},\ [\overline{U_e}] = \begin{bmatrix}V_e\\ Z_e\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$[\overline{L}] = \begin{bmatrix}[\overline{L_1}]\\ [\overline{L_2}]\\ \cdots\\ [\overline{L_m}]\end{bmatrix},\quad [\overline{L_i}] = \begin{bmatrix}L_{\mathrm{iV}}\\ L_{\mathrm{iZ}}\end{bmatrix} \tag{30}$$

$$[\overline{b}] = \begin{bmatrix}[\overline{b_1}]\\ [\overline{b_2}]\\ \cdots\\ [\overline{b_t}]\end{bmatrix},\quad [\overline{b_j}] = \begin{bmatrix}b_{\mathrm{jV}}\\ b_{\mathrm{jZ}}\end{bmatrix} \tag{31}$$

$$[\overline{\Theta}_e] = \begin{bmatrix}[\overline{\Theta}_{e1}], [\overline{\Theta}_{e2}], \ldots, [\overline{\Theta}_{\mathrm{em}}]\end{bmatrix},\ [\overline{\Theta}_{\mathrm{ei}}] = \begin{bmatrix}\Theta_{\mathrm{Vei}} & \Theta_{\mathrm{VZei}}\\ \Theta_{\mathrm{ZVei}} & \Theta_{\mathrm{Zei}}\end{bmatrix} \tag{32}$$

$$[\overline{\theta}_e] = \begin{bmatrix}[\overline{\theta}_{1e}], [\overline{\theta}_{2e}], \ldots, [\overline{\theta}_{\mathrm{te}}]\end{bmatrix},\ [\overline{\theta}_{\mathrm{je}}] = \begin{bmatrix}\theta_{\mathrm{jVe}} & \theta_{\mathrm{jVZe}}\\ \theta_{\mathrm{jZVe}} & \theta_{\mathrm{jZe}}\end{bmatrix} \tag{33}$$

Para determinar los elementos de los vectores $[\overline{L}]$ y $[\overline{b}]$ debe ser resuelto el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix}[\overline{A}_{\mathrm{mm}}] & [\overline{\theta}_{\mathrm{mt}}]\\ [\overline{\theta}_{\mathrm{tm}}] & [0_{\mathrm{tt}}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\overline{L}_m]\\ [\overline{b}_t]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\overline{U}_W]\\ [\overline{0}_t]\end{bmatrix} \tag{34}$$

Donde:

$$[\overline{\theta}_{\text{tm}}] = \begin{bmatrix} \overline{\theta}_{11} & \overline{\theta}_{12} & \dots & \overline{\theta}_{1m} \\ \overline{\theta}_{21} & \overline{\theta}_{22} & \dots & \overline{\theta}_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\theta}_{t1} & \overline{\theta}_{t2} & \dots & \overline{\theta}_{\text{tm}} \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Y como es usual se asume que: $[\overline{\theta}_{\text{tm}}][\overline{L}_m] = [\overline{0}_t]$

Puede notarse que es esencial establecer, además de los datos, todas las funciones del tipo: Θ_V, Θ_Z, Θ_{VZ}, Θ_{ZV}, θ_V,θ_Z,θ_{VZ} y θ_{ZV} que garanticen que el sistema (34) tenga solución única.

Dado que el producto entre matrices no es conmutativo entonces el estimador (28) es solo posible efectuarlo en el orden que se ha descrito. Para determinar el modelo dual UΘ deberá tenerse en cuenta la regla formal para hallar la transpuesta de una matriz de matrices: $\left[[M]_{\text{ij}}\right]^T = [[M]_{\text{ji}}^T]$ y la regla: $[(M_1M_2)M_3] = [M_1^T(M_2^TM_3^T)]^T$, donde M_1, M_2 y M_3 son matrices de órdenes que permitan esos productos.

Para ilustrar el enfoque descrito por (28) y (34) se explicará una modelación del siguiente caso de estudio 2:

Sean tres puntos del espacio R^2 donde se conocen sus coordenadas y los valores de K(o sea, Z) y C(o sea, V) denominados, respectivamente, Factor de Forma y Factor de Escala de la Distribución de Weibull (Tabla 1), tal como señalan Terrero-Matos, Legrá-Lobaina y Lamorú-Reyes (2014), que describen la distribución de frecuencias de la velocidad del viento en cada punto a 10 m de altura.

Tabla 1. Datos de los parámetros K y C de los modelos de Weybull para tres puntos de una región plana

X	Y	K	C
0	0	2,47	4,05
200	100	2,21	4,19
50	300	2,69	4,33

Se quieren establecer modelos de K y C en la región plana que contienen los tres puntos de los datos, de manera que se disponga de un modelo del potencial eólico a 10 m de altura. En esta oportunidad se hacen las consideraciones siguientes:

- m=3 puntos en los datos y 2 variables dependientes: K y C.
- Para la deriva t=1, $[\overline{\theta}_e] = \left[[\overline{\theta}_{1e}]\right]$ y $[\overline{\theta}_{1e}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $[\overline{\Theta}_{\mathrm{ei}}] = \begin{bmatrix} \Theta_{\mathrm{Vei}} & \Theta_{\mathrm{VZei}} \\ \Theta_{\mathrm{ZVei}} & \Theta_{\mathrm{Zei}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0015{+}0{,}005d_{\mathrm{ei}} & 0{,}0001 \\ 0{,}0001 & 0{,}0005{+}0{,}0015d_{\mathrm{ei}} \end{bmatrix}$

El modelo resultante se escribe formalmente:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ Z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0015{+}0{,}005d_{e1} & 0{,}0001 \\ 0{,}0001 & 0{,}0005{+}0{,}0015d_{e1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}0499315 \\ 0{,}320615 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0015{+}0{,}005d_{e2} & 0{,}0001 \\ 0{,}0001 & 0{,}0005{+}0{,}0015d_{e2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}225007846 \\ -0{,}02527992 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0015{+}0{,}005d_{e3} & 0{,}0001 \\ 0{,}0001 & 0{,}0005{+}0{,}0015d_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}17507635 \\ -0{,}29533505 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}484670548 \\ 4{,}1932131152 \end{bmatrix}$$

Estos modelos se muestran en la Figura 5.

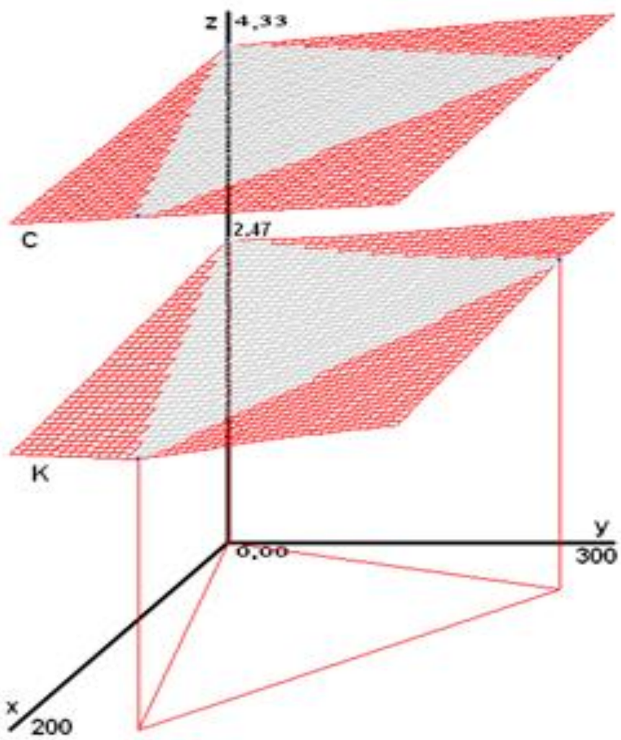

Figura 5. Modelos multivariados de K y C asumiendo la deriva: $[\overline{\theta}_e][\overline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [b_1]$ **y** $[\overline{\Theta}_{\mathrm{ei}}] = \begin{bmatrix} 0{,}0015{+}0{,}005d_{\mathrm{ei}} & 0{,}0001 \\ 0{,}0001 & 0{,}0005{+}0{,}0015d_{\mathrm{ei}} \end{bmatrix}$.

Finalmente debe comentarse sobre la posibilidad de generalizar también la expresión (11) para tener disponible una vía para aproximar los errores de una estimación multivariada puntual.

Como se ha explicado antes (Legrá-Lobaina 2018) en la estimación univariada el vector $[\lambda]$ se obtiene en el contexto del enfoque dual ΘU. Para el estimador multivariado este vector se define:

$$[\overline{\lambda}] = \begin{bmatrix} [\overline{\lambda_1}] \\ [\overline{\lambda_2}] \\ \cdots \\ [\overline{\lambda_m}] \end{bmatrix}, \quad [\overline{\lambda_i}] = \begin{bmatrix} \lambda_{iV} \\ \lambda_{iZ} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Teniendo en cuenta (29) y (36) los errores de una estimación simultánea de dos variables se escriben:

$$\underline{L}_e = [\underline{L}_{Ve} , \underline{L}_{Ze}] = \left[\frac{\sigma_{d_{ij}}}{\sqrt{m_d}} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_{iV}||V_i - V_e| , \frac{\sigma_{d_{ij}}}{\sqrt{m_d}} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_{iZ}||Z_i - Z_e| \right] \tag{37}$$

5. CONCLUSIONES

- Las tres metodologías descritas generalizan a los estimadores multivariados (A,U,Θ) los cuales, desde el enfoque de considerar las relaciones entre dos o más variables dependientes, dan respuestas a un amplio conjunto de problemas de modelación en las geociencias. Es significativo que todos los estimadores (A,U,Θ) pueden ser considerados admisibles en esta generalización multivariable y la expresión para aproximar el error de estimación también es extendida.

- El estimador simultáneo de variables dependientes explicado constituye una sistémica y poderosa opción para la modelación múltiple; el enfoque algebraico que aquí se presenta lo convierte en una herramienta matemática de fácil programación en aplicaciones como MatLab o en desarrolladores clásicos como C^{++}, Visual Basic o Delphi, lo cual ha permitido modelar los dos casos de estudio presentados.

6. REFERENCIAS

Chilés, J. P. y Delfiner, P. 1999: *Geostatistics. Modeling Spatial Uncertainty*. Canadá: John Wiley & Sons, Inc. 695 p.

Díaz-Viera, M. A. 2002: *Geoestadística Aplicada*. CITMA, Cuba: Instituto de Geofísica, UNAM e Instituto de Geofísica y Astronomía. Disponible en: http://mmc2.geofisica.unam.mx/ cursos/geoest/GeoEstadistica.pdf.

Giraldo, G. 2005: *Introducción a la Geoestadística. Teoría y Aplicación*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá. Disponible en: ftp://ftp.ciat.cgiar.org/ DAPA/projects/Cursos_Talleres/Curso_R/DOCUMENTOS/LIBRO%20DE%20GEOESTADISTICA.pdf

Legrá-Lobaina, A. A. 2017: Modelos de malla basados en estimadores (A,U,Θ). *Revista HOLOS*, 33(4): 88-110.

Legrá-Lobaina, A. A. 2018: Evaluación del error en estimaciones (A,U,Θ). *Revista HOLOS*, 34(3): 1-23.

Long, A. E. y Myers, D. E. 1997: A New Form of the Cokriging Equations. *Mathematical Geology*, 29(5): 685-703.

Marcotte, D. 2018: *Géostatisque I.* Chapitre 9: Cokrigeage. Department of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal. Disponible en: http://www.groupes.polymtl.ca/geo/marcotte/glq3401geo/chapitre9.pdf

Myers, D. 1992: Kriging, cokriging, radial basis functions and the role of positive definiteness. *Computers Math. Applic*, 24(12): 139-148.

Rivoirard, J. 2003: *Course on multivariate geostatistics*. Francia: Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris. 77 p.

Rusu, C. y Rusu, V. 2006: Radial Basis Functions versus Geostatistics in Spatial Interpolations. In: IFIP International Conference on Artificial Intelligence in Theory and Practice (p. 119-128). Springer, Boston, MA.

Terrero-Matos, E.; Legrá-Lobaina, A. A. y Lamorú-Reyes, A. 2017: Método de inverso de la potencia de la distancia para estimar la velocidad del viento. *Revista Ingeniería Energética*, 35(3): 263-273.

Recibido: 15/10/2018
Aceptado: 21/11/2018

Arístides A. Legrá-Lobaina, Doctor en Ciencias Técnicas. Profesor Auxiliar. Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa alegra@ismm.edu.cu